Múltiplas representações para o ensino de vetores: perspectivas proporcionadas por um tratamento da soma vetorial utilizando o compasso Euclidiano

(Multiple representations for teach vectors: prospects offered by a treatment of the vector sum using the Euclidean compasses)

Thiago Machado da Costa*

Instituto Federal de Brasília, Brasília, DF, Brasil.

Resumo

A partir da constatação acerca da dificuldade encontrada por alunos brasileiros em relação à soma vetorial, este trabalho visa analisar os tipos de representações utilizadas por estudantes na resolução de problemas sobre esse tópico. Foram analisados testes antes e depois da execução de uma sequência didática que utilizou o compasso Euclidiano como ferramenta para aplicar a regra do paralelogramo a fim de verificar se esse tipo de tratamento favoreceria a compreensão sobre módulo dos vetores resultantes. O primeiro teste revelou a visão não intuitiva dos alunos em relação à soma de vetores em diferentes direções e falhas de conversão entre os registros algébrico e geométrico, enquanto o segundo mostrou que a utilização do registro geométrico facilitou o cálculo da intensidade do vetor resultante.
Palavras-chave: desenho geométrico, ensino de física, registros de representação semiótica, soma vetorial.

Based on the observation about the difficulty of Brazilian students in relation to the vector sum, this paper aims analyze the types of representations used by students in solving problems on this topic. Tests were analyzed before and after the implementation of an instructional sequence that used the Euclidean compasses as a tool to apply the rule of the parallelogram in order to verify that such treatment would favor the understanding about module of the resulting vectors. The first test revealed a no intuitive vision of the students to the sum of vectors in different directions and conversion gaps between algebraic and geometric records, while the second shows that the use of the geometric register facilitated the calculation of the intensity of the resultant vector.
Keywords: geometric draw, physics education, semiotic registers of representation, vector sum.

*E-mail: thiago.costa@ifb.edu.br

1 Introdução

O contato inicial dos estudantes de Ensino Médio com a representação vetorial ocorre por meio da abordagem geométrica, que associa a ideia de vetor a grandezas as quais não são totalmente caracterizadas apenas pela sua intensidade. Assim, o deslocamento de uma partícula ou sua velocidade aparecem como exemplos clássicos utilizados pelos professores de física. Entretanto, apesar de ser tratado somente no contexto dessa disciplina, os conceitos geométricos mobilizados para trabalhar com vetores são caracterizados por uma estrutura bastante particular, haja vista que uma grandeza física vetorial empresta da matemática uma linguagem com regras a qual devem se submeter [1]. Apesar disso, as duas disciplinas têm abordagens bastante distintas para o assunto.

De acordo com Poynter e Tall [2], a abordagem do conceito de vetor na física foca principalmente a representação gráfica de grandezas mecânicas, enquanto que, na matemática, essa ideia permanece apenas enquanto se trata da translação de um ponto no espaço, ideia que tende a se aproximar posteriormente da álgebra linear, em detrimento da representação geométrica. Nesse sentido, partindo do consenso de que a matemática está alojada no corpus das ciências, e na física em particular, não só como ferramenta, mas como estruturante do pensamento físico, e também considerando as diferenças epistemológicas existentes entre as duas áreas, é imperativa a necessidade de se observar cautelosamente a maneira como o conceito de vetor deve ser ensinado e aprendido quando dentro dos domínios da física.

O cuidado relatado é necessário principalmente quando se fala em operações com vetores, visto que a fragilidade no entendimento da representação vetorial para esses tratamentos é uma defasagem em um conceito matemático que implica na falta de compreensão de conceitos físicos. Talvez seja esse o mais relevante e complexo problema enfrentado pelos professores de física, pois, de acordo com alguns autores [3][4], mesmo depois de apresentados à regra do paralelogramo, por exemplo, os alunos ignoram o fato geométrico de existir um ângulo entre dois segmentos orientados na hora de calcular a intensidade do vetor resultante, apesar de conseguirem representar sua direção de forma correta em alguns casos.

Segundo Menon [3], a soma geométrica de vetores é geralmente bem compreendida pelos alunos depois que a regra do polígono é apresentada. Além disso, é intuitivo que o tamanho dos segmentos representados é proporcional à intensidade do vetor. É justamente nessa conjectura que reside o problema: como a maioria das representações é feita sem rigor de tamanho, os alunos acabam operando com vetores como fazem com escalares sem se darem conta de que suas respostas, na maioria dos casos, não correspondem aos desenhos feitos [4] Em outras palavras, existe uma dificuldade tácita na compreensão de que operações vetoriais não representam simples manipulações algébricas dos módulos dos vetores envolvidos. Isso demonstra que a relação entre a álgebra e geometria não é explícita: o ente matemático representado por meio da seta carrega significados não perceptíveis instantaneamente e suas operações são muitas vezes não instintivas. A soma entre dois vetores evidencia bastante essa ideia. Ao observarmos os trabalhos de Carvalho e Villani [3], Bittar [5] e Carneiro [6], os quais descrevem sequências didáticas com diferentes enfoques no que diz respeito à adição de vetores, é possível enumerar e exemplificar algumas dificuldades apresentadas pelos estudantes:

1. Falta de habilidade para operar com setas análogas, o que inclui a incompreensão sobre o vetor manter suas propriedades quando transladado no plano.

2. Não entendimento acerca do significado da operação da soma geométrica como a representação por meio de uma seta única do efeito gerado por todas as setas a serem somadas.

3. Confusão entre a soma dos vetores e de seus módulos. Há incompreensão, por exemplo, sobre o módulo do vetor resultante da soma de dois vetores antiparalelos ser uma subtração de seus módulos.

4. Não mobilização do efeito físico para encontrar o vetor resultante, o que implica na incompreensão da soma de vetores em direções diferentes e, portanto, da regra do paralelogramo.

5. Indistinção entre o vetor e sua representação.

Como os estudos foram feitos em diversos níveis de escolarização, essas constatações revelam que os estudantes vêm utilizando em larga escala suas concepções prévias para tratar os problemas envolvendo vetores ou, ainda, vêm fazendo-a de forma mecânica, ausente de significado. Essa é uma preocupação discutida por Andrade e Bario [7], os quais defendem que deve haver a preocupação de se ensinar as operações com vetores com a preocupação em dar-lhes o significado matemático por elas carregado. Dessa maneira, não é benéfico lançar mão de algoritmos prontos, que são relativamente mais simples de serem memorizados e utilizados. Pensando dessa maneira, é necessário, então, estabelecer uma conceituação da soma vetorial de forma que a mesma seja compreendida de forma significativa pelos estudantes.

Carneiro [6] defende que a ausência de significado para a operação de soma pode ser revertida a partir da atribuição de um efeito físico que vai além da translação matemática. De acordo com essa proposta, alguns empecilhos enumerados anteriormente poderiam ser superados, visto que o ente matemático aqui discutido fica dotado de significação: um vetor é equivalente a outro, se os dois representam o mesmo efeito físico. A soma de vetores passa a ser representada como outro vetor que tem o mesmo efeito físico da combinação dos que foram somados. Assim, entender porque o tamanho do vetor resultante nem sempre é a soma dos módulos dos vetores que o originaram ou que a representação geométrica de vetores em direções diferentes pode ser a diagonal de um paralelogramo torna-se mais natural.

Essa ideia é favorecida pela representação dos vetores na forma gráfica. Isso porque, de acordo com trabalhos publicados na área de matemática [8] [9], a utilização do desenho geométrico permite concretizar conhecimentos geométricos teóricos, facilitando a definição de conceitos e a demonstração de propriedades, e mobilizar as capacidades de planejamento e organização, a partir da conexão entre o raciocínio espacial e a percepção visual, de modo a facilitar o pensamento lógico-dedutivo. Tais vantagens oferecidas pelo desenho corroboram, inclusive, o papel das construções geométricas relatadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) [10], ou seja, permitir a visualização a fim de provar propriedades e fazer conjecturas por meio do uso de régua e compasso.

Esse rigor proporcionado pelos instrumentos não seria necessário caso o objetivo fosse entender a direção de um vetor resultante de uma soma, entretanto quando se fala em vetores inclinados em diferentes direções, é complicado desprezar o rigor instrumental a partir do momento em se procura a intensidade do ente geométrico, e fazer isso é deixar de oportunizar a criação de conjecturas pelo aluno, que, como foi argumentado anteriormente, não tem como intuitivos os valores para esses resultantes. Por esse motivo, lançar mão das construções geométricas parece ser uma estratégia bastante pertinente para o estudo da geometria e, portanto, dos vetores.

Entretanto, por conta do conteúdo de vetores não ser contemplado pelo currículo de matemática do ensino brasileiro, menos ainda quando se fala em construções geométricas com régua e compasso, não há estudos que o abordam nesse contexto.

Dessa forma, propõe-se analisar aqui se a abordagem da soma vetorial utilizando também as construções com régua e compasso pode apresentar-se como uma nova maneira não só de visualizar o problema, mas de tratá-lo, pois, dessa forma, pode fornecer uma alternativa para amenizar a dificuldade encontrada pelos estudantes no que se refere às operações com vetores. A análise pode ser melhor guiada pela teoria das representações semióticas de Raymond Duval, visto que seus pressupostos tratam das diversas forma de representar um objeto matemático e como podem ser manipuladas na resolução de problemas.

2 Referencial Teórico

Raymond Duval é o percursor da teoria a qual defende que a aprendizagem em matemática é possível somente quando o sujeito é capaz de empregar diferentes representações de conceito advindas de registros diversos. Com o objetivo de tentar explicar de que maneira as representações de objetos utilizados na matemática influenciam no processo de ensino-aprendizagem dessa disciplina, a denominada teoria dos Registros de Representação Semiótica (RRS) foi desenvolvida pelo filósofo e psicólogo francês, cuja máxima é de que "a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas" [11], p.15.

Para entender de que ponto de vista o autor conceitua a expressão representações semióticas, bem como a forma como as ideias geradas a partir desse conceito podem ser aproveitadas para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem dos vetores, é necessária uma definição mais precisa de alguns termos referentes à teoria.

2.1 Registro de Representações Semióticas

A partir do que chama de paradoxo cognitivo do acesso aos objetos de conhecimento, Duval [12] descreve os dois requisitos necessários para que estudantes consigam acessar o pensamento matemático: a escolha obrigatória de uma representação semiótica e a distinção entre essas e o objeto que representam. O aparente contrassenso se dá porque, para o autor, o único acesso aos objetos matemáticos se dá por meio de sua representação, que "se refere a uma grande variedade de atividades de significação: crenças firmes e abrangentes sobre algo, várias formas para evocar e denotar objetos" [13], p.3. De forma mais simples, a representação seria uma maneira de retratar o objeto que possui caráter abstrato para que se possa agir cognitivamente sobre ele.

As representações descritas pela RRS são denominadas semióticas porque, além de serem conscientes, necessitam de um signo, notação ou conjunto de símbolos para corresponderem a um objeto. Quando em conjunto, as representações vão formar os sistemas semióticos de representação, que reúnem os códigos utilizados para retratar conceitos. Justamente pela característica peculiar de promover a articulação entre as atividades cognitivas básicas, esse sistema semiótico é denominado registro.

A partir do que foi dito anteriormente, há de se destacar que os símbolos não são utilizados apenas para representar os conceitos, mas são promotores da ligação consciente entre as atividades cognitivas como o raciocínio, a conceitualização e a resolução de problemas. A mobilização desses processos é imprescindível para que haja progressão na aprendizagem, pois eles permitirão que o estudante seja capaz de perpassar um objeto de estudo por diversos sistemas de representação semiótica, ocasião a qual Duval [12] acredita ser a primeira indicação de progresso no aprendizado.

A partir do momento em que há progresso na aprendizagem, sua real efetivação se dá a partir da resolução do conflito cognitivo comentado anteriormente, ou seja, a partir do momento em que o aluno é capaz de diferenciar o objeto de suas representações. Quando há a compreensão de que essas são apenas o meio para acesso àquele, provavelmente houve a compreensão do conceito. Castro [14], especificamente para o conceito de vetor, relata que a não resolução do paradoxo cognitivo faz com que a incompreensão de um conceito se propague e prejudique a aquisição de outros, pois os alunos tendem a conceituar vetor como uma flecha desenhada no espaço, identificando uma das representações do objeto, mas não o objeto em si. Isso se dá possivelmente por conta do uso de pouca variedade de sistemas de representação semióticas.

Dessa maneira, é necessário verificar quais são os possíveis sistemas a serem e mais frequentemente usados e de que forma podem ser trabalhados para favorecer a compreensão dos alunos em relação ao objeto matemático aqui discutido. A diferenciação entre tipos de representação semiótica é de suma importância para a análise da atividade matemática sob o ponto de vista do processo de ensino-aprendizagem, principalmente quando se fala de resolução de problemas e da produção dos estudantes nessa área de conhecimento. Os tipos de registros, bem como as variadas representações que abarcam, estão representados de forma esquemática na Figura 1.

	REPRESENTAÇÕES DISCURSIVAS *Denotação de objetos (nome, sinais...) / Demonstração de relações ou propriedades/ Inferência (dedução, cálculo...)*	REPRESENTAÇÕES NÃO DISCURSIVAS *(perspectiva em 0, 1, 2 e 3 dimensões)*
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS não podem ser sistematizados na forma de algoritmo	EM LINGUAGEM NATURAL Oral: *Explicações, argumentações, deduções* Escrita (visual): *teoremas, provas e demonstrações*	Icônica: *esboço, desenho, protótipo* Não icônica: *figuras geométricas, que também podem ser obtidas a partir de construções geométricas*
REGISTROS MONOFUNCIONAIS a maioria dos processos são algoritmizáveis	EM SISTEMAS SIMBÓLICOS Somente escrito (impossível de ser dito oralmente): *Cálculo, sistemas de escrita (numérica, algébrica, simbólica), demonstrações*	Representações em eixos orientados (cartesianos) ou não: *Gráficos, diagramas, sistemas de coordenada, interpolação e extrapolação*

Figura 1: Os diversos registros utilizados na atividade matemática e suas classificações - Adaptado de Duval [13]

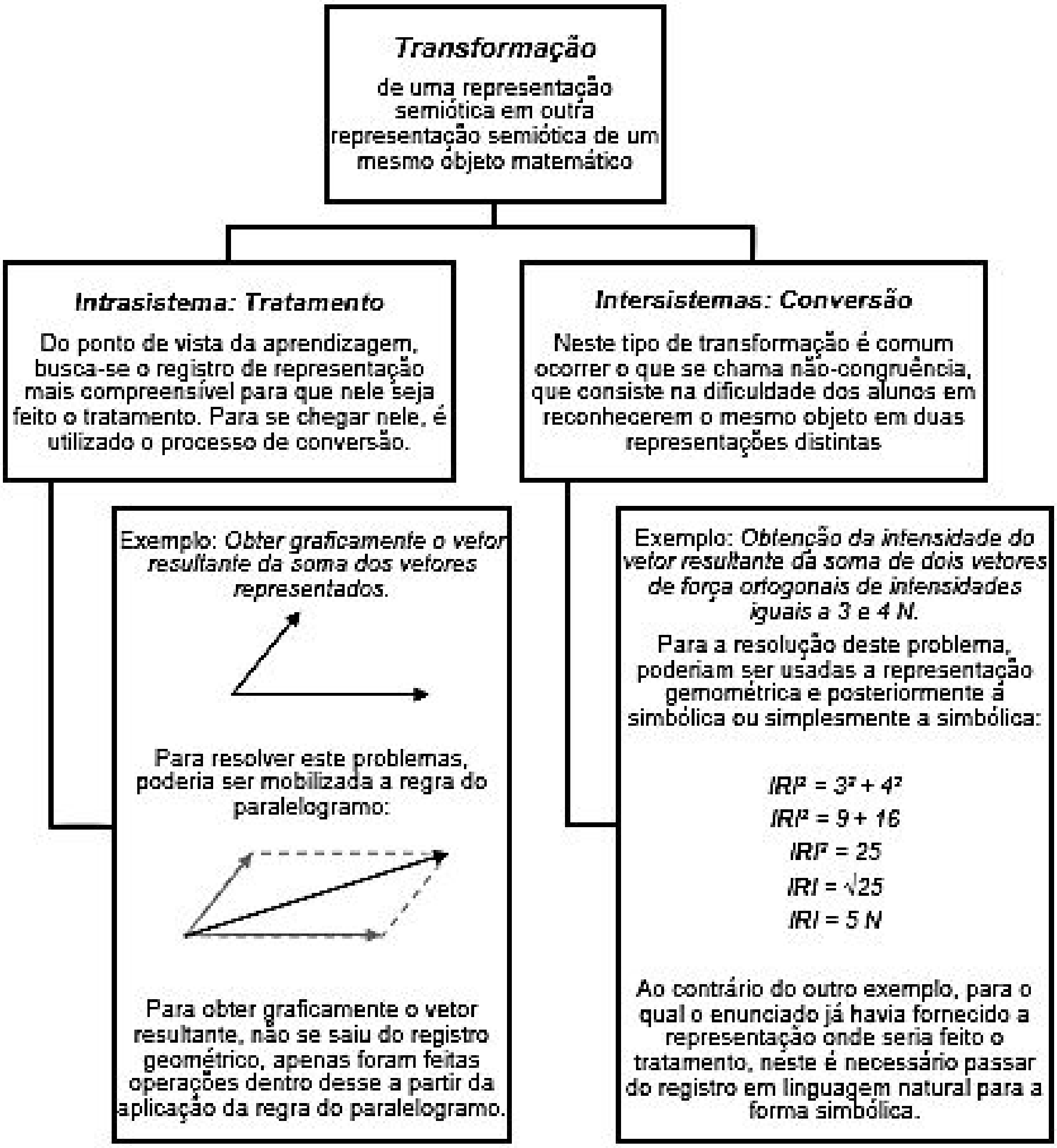


Figura 2: Transformações de representações semióticas

Para que haja a permutação entre os vários tipos de representação semióticas mostrados na Figura 1, requisito indispensável para a aprendizagem em matemática, a teoria RRS sugere que dois tipos de procedimentos podem ser mobilizados: a conversão e o tratamento. Este último é caracterizado por transformações das representações sem que seja mudado o registro, enquanto que aquela primeira representa exatamente a mudança de um registro para outro sem que o objeto de estudo seja modificado. A Figura 2 mostra, de forma esquemática e comparativa, um diagrama que exemplifica as transformações intra e intersistemas de representação para o conceito de vetor. Apesar de o diagrama fornecer uma ideia de como a RRS pode ser aplicada na manipulação do ente geométrico, é necessário também relembrar algumas peculiaridades da linguagem vetorial de modo a verificar possíveis tratamentos e conversões a serem realizados com auxílio de régua e compasso.

2.2 Linguagem vetorial e RRS

Um vetor é uma classe de segmentos geométricos orientados que possuem a mesma direção, tamanho e sentido, cuja notação adotada para identificá-lo é composta geralmente por uma letra (ou letras identificadoras dos pontos inicial e final) com seta sobreposta. Essa é uma maneira de definir o conceito na forma de linguagem natural entretanto, uma conversão para a representação gráfica seria o desenho de uma flecha caracterizado por comprimento, direção e sentido. Dentro desse tipo de registro, é possível enumerar e exemplificar propriedades que um vetor pode assumir em relação a outros e que são importantes quando se deseja tratar geometricamente a soma vetorial. A Figura 3 mostra algumas das comparações possíveis entre dois vetores segundo suas características gráficas.

Como já foi discutido anteriormente, é de difícil compreensão por parte dos alunos a soma de dois vetores que estão em direções diferentes. Na maioria dos materiais que abordam esse conteúdo, essa operação é motivada por um fato concreto, geralmente por meio da ideia física de deslocamento. Entretanto, o deslocamento representa uma situação particular na qual os vetores já estão unidos em sequência. Para a situação geral, é necessário lançar mão da relação de equipolência[1] para justificar o translado de um vetor no espaço sem que ele perca as suas informações originais.

É interessante a maneira como Leithold [16] trata a interpretação geométrica da soma de dois vetores: um vetor $\vec{U}$ translada um ponto A, que determina sua origem, para um ponto B em seu final (1), ponto o qual é transladado para um ponto C no final do segundo vetor $\vec{V}$ que está sendo somado (2). O vetor resultante seria o vetor equivalente ao deslocamento de A para C, pois representa outra maneira de escrever o mesmo translado. As representações dos vetores $\vec{U}$ e $\vec{V}$ são, dessa forma, lados adjacentes de um paralelogramo cuja diagonal é a resultante $\vec{U}+\vec{U}$ (Figura 3).

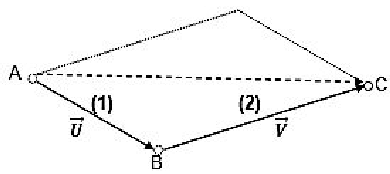


Figura 3: Representação geométrica da regra do paralelogramo.

[1]Existe uma relação de equipolência entre dois vetores quando são equivalentes, ou seja, quando podem ser representados por segmentos de reta com mesmo módulo, direção e sentido. Essa relação é mantida independentemente de qualquer translação no espaço a qual pode ser submetido qualquer segmento orientado.

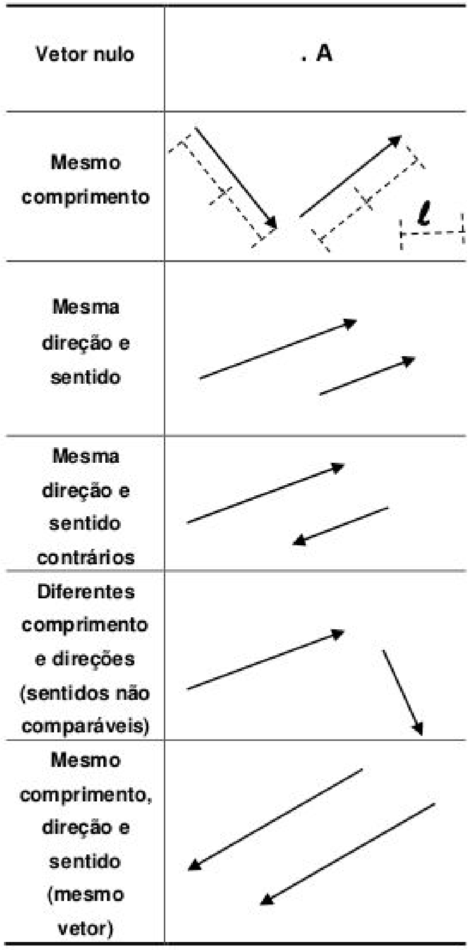


Figura 4: Comparação entre vetores segundo suas características gráficas.

Da maneira como é tratada, a forma anteriormente retira a ideia de juntar vetores para a de representar de forma equivalente. Se entendida pelos alunos de acordo com aquela primeira concepção, o entendimento sobre a soma de vetores acontece a duras penas, enquanto que utilizando a segunda, é possível fazer uma analogia com os escalares, para os quais a soma possui a mesma interpretação, já conhecida pelos estudantes. Entretanto, caso seja feita a associação, deverá ser de modo cauteloso, de modo a explicitar de forma clara com que sentido a palavra soma está sento utilizada.

A partir dessas ideias expostas, se o registro geométrico for eleito para resolver problemas por parte dos alunos, é necessário estabelecer tratamentos dentro desse sistema, visto que somente a partir da manipulação do objeto de estudo se chega à resposta requerida por um exercício, por exemplo. Dessa forma, visando propor técnicas pertencentes ao domínio das representações não-dircursivas dos registros multifuncionais, será apresentado o problema da soma de vetores sob um tratamento baseado nas contruções geométricas fundamentais com régua e compasso. Acredita-se que essa maneira alternativa de tratar aquele problema possa tornar sua resolução mais intuitiva, além de permitir demonstrações e criação de conjecturas.

3 Metodologia

Foi empregada uma metodologia de cunho qualitativa-interpretativa com 93 alunos de quatro turmas de 8º ano do Ensino Fundamental, durante o horário normal de aula destinado à disciplina de Desenho Geométrico. Esses estudantes já haviam estudado noções acerca do conceito de força como uma grandeza vetorial na disciplina de física. De acordo com o conteúdo programático dessa disciplina, até o momento de início da pesquisa os estudantes deveriam ser capazes de resolver problemas em que duas forças encontram-se na mesma direção. Entretanto, o material utilizado nas aulas de física não abrangia o conteúdo de vetores, atendo-se apenas à distinção entre grandezas escalares e vetoriais.

Em relação aos conteúdos de Geometria e Desenho Geométrico (DG), todas as turmas participantes já haviam visto as construções fundamentais com régua e compasso necessárias para desenvolver a atividade proposta, i.e., construção de paralelas, perpendiculares, bissetrizes, ângulos, polígonos e transporte de ângulos, assim como a parte introdutória sobre vetores, ou seja, definição, notação, uso, características e a propriedade de equipolência. Acredita-se, assim, que os estudantes já tivessem desenvolvido raciocínio geométrico-espacial básico, manuseio correto dos instrumentos de desenho e nível de abstração para o desenvolvimento da proposto. Em matemática, e também em DG, foram trabalhados os teoremas de Tales e Pitágoras.

Para a aplicação da proposta, as turmas não sofreram nenhum tipo de separação, visto que o objetivo não era de verificar a soberania de uma metodologia de ensino em relação a outras. Não foram feitas alterações na rotina de trabalho, de modo a deixar o ambiente de forma mais natural possível, evitando o aparecimento de novas variáveis que viesses a influenciar nos resultados. A pesquisa dentro da escola foi dividida em três partes: aplicação do pré-teste, aplicação da proposta de ensino referente à soma de vetores a partir de construções geométricas e aplicação do pós-teste.

Na primeira etapa foi apresentada uma questão simples de mecânica que mostrava três bloquinhos submetidos a duas forças cada, representadas por vetores acompanhados de suas intensidades. O primeiro caso apresentava vetores paralelos, o segundo, antiparalelos, e o terceiro, perpendiculares (Anexo 1). Para cada caso, foi pedido que o valor da força resultante, bem como sua direção e sentido fossem indicadas. Os alunos foram instruídos a resolver a questão de acordo com os conhecimentos que já possuíam, visto que o objetivo era identificar conhecimentos prévios, adquiridos formalmente, advindos de concepções prévias, de senso comum ou pelo uso da lógica, e, principalmente, mapear as representações semióticas mobilizadas na resolução do problema.

Já se sabia que os alunos não haviam se deparado ainda com a soma de vetores dispostos ortogonalmente. O item referente a essa situação foi colocado com a intenção de saber se eles eram capazes de utilizar conhecimentos já adquiridos para, possivelmente, chegar ao teorema de Pitágoras, e para verificar se as características do vetor resultante da soma de vetores em direções diferentes seriam intuitivas para eles antes de virem tal conteúdo formalmente. As aulas relativas à soma de vetores sucederam-se logo após o pré-teste.

O desenvolvimento do conteúdo se deu em três aulas, com um tempo total de 2 horas e 30 minutos. O objetivo a ser alcançado era o de mostrar o significado e as representações para a soma entre dois vetores para as diversas posições relativas entre eles sem priorizar nenhum tipo de representação. O problema da soma foi representado principalmente dentro dos domínios da linguagem natural, do registro geométrico, a partir do uso do compasso e da régua, e do registro simbólico algébrico para os casos em que os cálculos eram adequados ao nível de conhecimento matemático dos alunos.

A primeira aula iniciou-se com a discussão acerca da soma de vetores em direções iguais a partir de situações cotidianas modeladas. Pelo fato de já terem visto algo semelhante em física, os alunos não tiveram dificuldade no entendimento desses casos, de modo que a única novidade era o tratamento possibilitado pelos instrumentos de construção geométrica. A propriedade de os vetores poderem ser transladados sem perder suas características foi o argumento utilizado para que o compasso fosse empregado para transportar no plano os segmentos representativos dos vetores e, posteriormente demarcar o tamanho a ser aumentado, quando os vetores estavam dispostos paralelamente, ou diminuído, quando antiparalelos.

O professor, utilizando régua e compasso para lousa, mostrou como o módulo de um vetor poderia ser medido e posteriormente transportado para realizar geometricamente a operação de soma para cada posição relativa entre vetores. Os alunos acompanharam com os próprios instrumentos e puderam medir os tamanhos dos vetores resultantes. As conclusões provenientes da analise geométrica foram registradas na lousa por meio da linguagem natural, assim como as operações aritméticas na forma simbólica.

Ao final da primeira aula, foi apresentada uma situação em que os vetores foram dispostos de modo a formar um ângulo reto entre si. A partir dessa suposição, os alunos deveriam pensar em casa nas características do vetor resultante. Foi sugerido que pensassem em alguma grandeza que pudesse ser representada por um vetor e levassem em consideração o significado da operação de soma, a qual resulta em um vetor equivalente aos dois que estão sendo somados e não simplesmente a aproximação geométrica de dois segmentos ou da soma direta de suas intensidades. Essa sugestão visava motivar o assunto da aula seguinte.

No início da segunda aula, pediu-se aos estudantes que afastassem suas mesas para a parte anterior da sala, de modo a deixar o fundo vazio. Foi solicitado que um aluno se voluntariasse para participar da atividade, a qual consistia em fazer alguns deslocamentos em linha reta para demonstrar de que maneira era possível representar, com apenas um vetor, o efeito físico de um deslocamento indicado por dois outros vetores em separado. Para isso, foi solicitado que o estudante andasse paralelamente a uma das paredes da sala e, após percorrer alguns metros, virasse em um ângulo reto, continuando o movimento em linha reta por todo o comprimento da parede consecutiva.

Após o término do movimento descrito anteriormente, cada turma foi arguida com a seguinte questão: “existe outro caminho, um caminho mais curto, que leve o colega do ponto de início ao ponto final?”. Como esperado, em todas as turmas houve a indicação de que a linha reta entre os pontos de início e final seria o caminho pedido, de modo que o participante fez o deslocamento sugerido pela turma. Após essa pequena interação, os alunos voltaram ao lugar e os deslocamentos feitos pelo colega foram representados no quadro por meio de vetores. Novamente foram questionados: “de acordo com as representações feitas, é possível dizer que o tamanho do vetor que representa o menor caminho pode ser a soma dos tamanhos dos outros dois?”. Alguns alunos preferiam não opinar, porém, em todas as turmas, foi possível ouvir comentários que expressavam a ideia de que isso seria impossível, já que o vetor diagonal representava o menor caminho. Essas ideias foram destacadas oralmente pelo professor e posteriormente registradas na lousa.

Dessa forma, a partir da constatação de que a intensidade do vetor resultante não poderia ser dada apenas pela soma aritmética das intensidades de seus geradores, os alunos foram interrogados se haveria, então, uma maneira de saber esse tamanho. Alguns sugeriram o uso da régua e proporção, entretanto, em nenhuma das turmas, foi sugerido o uso do Teorema de Pitágoras antes que fosse apontado que os vetores formavam um triângulo retângulo. Essa possibilidade foi, então, apresentada aos alunos acompanhando a representação geométrica feita anteriormente. A expressão algébrica do Teorema de Pitágoras foi registrada na lousa, com a preocupação de utilizar a representação simbólica indicativa do módulo de vetores ($\left|\vec{R}\right|^2 = \left|\vec{A}\right|^2 + \left|\vec{B}\right|^2$). A partir disso, a intensidade vetor resultante para a situação proposta no início da aula foi algebricamente calculada.

A sugestão de usar a régua para medir o vetor resultante foi utilizada para o caso de vetores com um ângulo qualquer entre si. Para esse caso, a relação de equipolência foi utilizada para justificar o translado de um dos vetores de modo que sua origem coincidisse com a do outro vetor ao qual estava sendo somado. O professor mostrou na lousa que a construção de um paralelogramo por meio do uso de compasso e régua, a partir da operação geométrica de transporte de ângulos, permitia fazer a movimentação do vetor e encontrar o resultante a partir da sua diagonal. Para esse caso específico, foi feito somente o tratamento geométrico devido à fata de pré-requisito dos alunos para tratar o problema algebricamente.

A intervenção terminou na terceira aula, na qual foi discutida a impossibilidade, para aquela série, de calcular algebricamente o módulo do vetor resultante da soma entre vetores que não estão dispostos de forma paralela ou ortogonal entre si. Essa última aula também foi destinada para a resolução de alguns exercícios envolvendo os vários casos mostrados e para a constatação da validade do Teorema de Pitágoras a partir de medidas feitas com a régua. Os alunos não foram avisados de que fariam o pós-teste na aula seguinte.

O pós-teste foi constituído de uma situação contextualizada acerca do conteúdo trabalhado. Pedia-se simplesmente as características do resultante gerado pela soma de forças ortogonais sendo aplicadas por um atleta em um halter (Anexo 2). A questão, após ser interpretada corretamente, sugeria o uso regra do paralelogramo e, posteriormente, do Teorema de Pitágoras, ou diretamente desse último, caso o aluno conseguisse fazer a representação geométrica mentalmente. O problema proposto foi diferente dos itens do pré-teste, pois as questões que compunham esse foram discutidas em sala e usa-las de novo poderia favorecer a reprodução de uma solução fornecida previamente. Para esse segundo teste, almejava-se verificar se, após a execução da proposta didática, os alunos adquiriram mais uma forma de representação semiótica e de um tratamento para ajudá-los com os problemas que envolvem soma de vetores e, ainda se o número de acertos em relação ao cálculo do módulo da resultante teria alguma correlação com o uso de registros geométricos.

4 Resultados e discussões

4.1 Pré-teste

Primeiramente, todas as anotações feitas pelos alunos nas duas primeiras questões do teste foram analisadas com o propósito de se eliminar aqueles nos quais não era possível identificar compreensão do problema a partir da utilização do conceito de força ou divergiam totalmente do que foi pedido. Isso foi feito para que a análise do terceiro item, que envolvia soma de vetores ortogonais entre si, fosse feita apenas para as produções dos alunos que demonstraram compreensão plausível do problema em relação ao nível de conteúdo já adquirido na disciplina de física. Dessa maneira, é possível citar alguns dos motivos que descartaram alguns testes: uso de operações inadequadas entre as intensidades dos vetores, i.e., soma das intensidades de vetores dispostos de forma antiparalela ou ortogonal, multiplicação e divisão entre as intensidades; desenhos dos vetores resultantes com direções e/ou sentidos incorretos; não realização da tarefa, falta de dados pedidos ou apresentação de respostas em desacordo com o que era pedido no enunciado. Por esses motivos foram rejeitados 14 dos 93 testes, o que representa aproximadamente 15% da amostra.

Após essa primeira separação, as respostas para a terceira questão do teste foram analisadas para verificar o nível de aproximação que tinham com a resposta considerada correta. Dentre os 79 testes restantes, nenhum apresentou o valor esperado para a intensidade do vetor resultante, o que não foi algo imprevisto, já que a situação apresentada não era familiar aos estudantes, apesar de haver a possibilidade real de algum deles mobilizar o Teorema de Pitágoras.

Mesmo sem adotar os passos necessários para a resolução completa do problema, foram observados dois procedimentos usados com frequência para encontrar o valor da intensidade: soma das intensidades e subtração das mesmas. Algumas anotações deixadas pelos estudantes apresentavam justificativas para a adoção dessas formas de resolução, de modo que a primeira era motivada pela intenção de juntar as forças na composição de uma maior, enquanto que a segunda era explicada pelo fato de os vetores estarem dispostos em diferentes direções. Em todo caso, a maioria dos estudantes ignorou a importância do ângulo formado pelos segmentos orientados, assim como já previra as conclusões do trabalho de Carvalho e Villani [3].

Apesar de não terem sido encontradas respostas corretas para a magnitude da força resultante pedida no terceiro item do teste, 26 estudantes apresentaram respostas coerentes para a direção e sentido da mesma. Esse fato sugere que a operação geométrica de soma pode ser mesmo intuitiva para alguns, assim como defende Menon [4]. A partir dessa constatação, dividiu-se novamente a amostra, separando as anotações do grupo que indicou corretamente a direção e o sentido do vetor resultante (Grupo B) a fim de mapear e comparar para os registros de representação semiótica utilizados na resolução do problema apresentado utilizados por aqueles que indicaram de forma equivocada as características geométricas pedidas (Grupo A). O quadro logístico para o tratamento dos dados referentes ao primeiro teste pode ser resumido pelo diagrama mostrado na Figura 5.

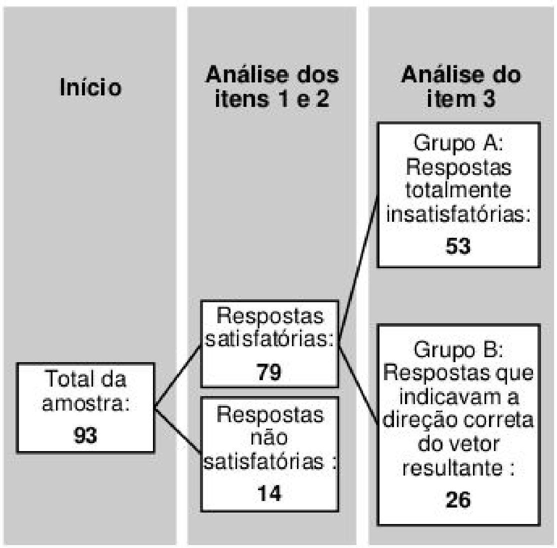


Figura 5: Andamento logístico realizado para análise de dados do pré-teste.

Para o Grupo A, foi possível perceber três atitudes frequentes nas resoluções: questões sem resposta, alunos que somente descreveram as características dos vetores dados, ou seja, continuaram a utilizar os dois vetores sem considerar a possibilidade de combiná-los em um equivalente, e, por último, alguns deixaram expressões de dúvida ou não entendimento sobre a questão com frases como "isso não faz sentido" ou "não tem como subtrair a horizontal pela vertical".

Seguindo a análise, foram mapeados, então, os tipos de representação semiótica mobilizados para resolução dos problemas pelos dois grupos em separado. Puderam ser identificadas três tipos de representação semiótica que efetivamente demonstraram influência na resolução do problema, a saber, registros em linguagem natural na forma de argumentação, uso de sistemas simbólicos na execução de cálculos e representações geométricas, nem todas com a preocupação com o rigor do uso de instrumentos de desenho (Figura 6). Alguns alunos já utilizaram a notação utilizando a seta sobreposta e as barras indicativas de módulo. Os registros identificados na resolução dos estudantes reunidos em cada grupo podem ser esquematizados pelos diagramas mostrados nas Figuras 7 e 8.

Em ambos os grupos foi frequente a conversão do registro geométrico, o qual já era apresentado na questão, em outro tipo (linguagem natural ou algébrica). Entretanto, é possível notar que, no Grupo A, os alunos tenderam realizar os tratamentos necessários ao problema utilizando a linguagem natural e a aritmética, sem a preocupação de retornar ao registro geométrico após a resolução. Ao contrário desse primeiro grupo, em que foram encontrados 22,6% de testes com representações geométricas, foi maior a frequência do uso desse tipo de registro nos testes dos alunos que acertaram a direção do vetor resultante, nos quais foram encontrados registros não discursivos em 65,4% das resoluções. Esse número parece sugerir que a utilização do registro geométrico exerce alguma influência na obtenção das respostas, o que pode se relacionar ao argumento de que a visualização dos objetos geométricos permite um maior controle sobre os processos mentais essenciais para a resolução de problemas de origem geométrica [8][9].

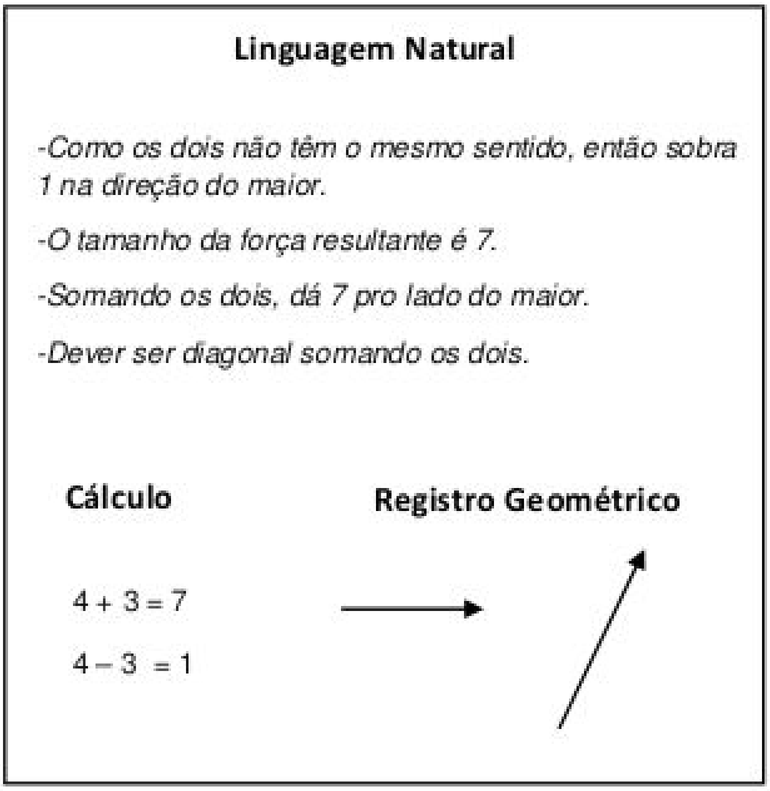


Figura 6: Modelos de respostas frequentemente encontradas no pré-teste, conforme representação semiótica utilizada.

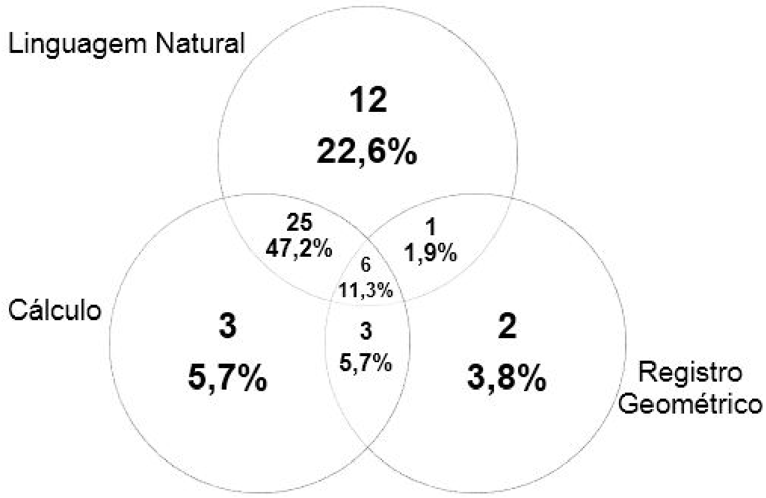


Figura 7: Diagrama dos tipos de registros de representação semiótica utilizados pelo grupo que não apresentou solução satisfatória para a terceira questão do pré-teste (Grupo A).

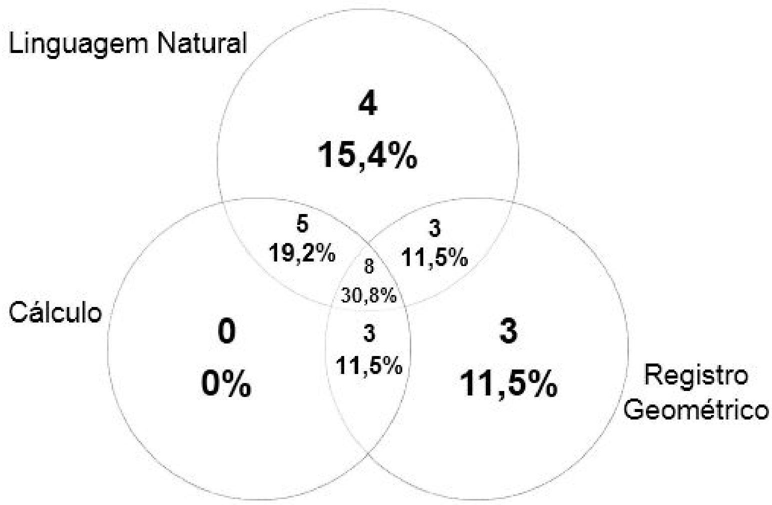


Figura 8: Diagrama dos tipos de registros de representação semiótica utilizados pelo grupo que apresentou solução parcialmente satisfatória para a terceira questão do pré-teste.

Analisando ainda o número de representações utilizadas para resolver os itens propostos, é possível inferir que ambos os grupos utilizaram, em sua maioria, dois tipos de registro. Entretanto, é perceptível uma acentuada diferença quando se compara os grupos A e B em relação ao uso de três representações, já que o segundo grupo teve uma frequência quase triplicada em relação ao primeiro (Figura 9). Levando em consideração que a combinação entre as representações na forma de linguagem natural e cálculo foi a maneira com que a maioria absoluta do Grupo A justificou a resolução do problema, e também considerando a grande porcentagem de registros geométricos no grupo B, pode-se supor uma associação entre o número de registros mobilizados e a tendência em se conduzir à resposta correta. Ademais, pode-se supor que a representação geométrica foi um fator pontual de diferença entre os dois grupos quando se considera a resolução esperada para os itens do teste aplicado.

Ao se comparar os resultados obtidos em relação ao número de representações utilizadas por cada grupo, percebe-se que os dados compactuam com as ideias de Duval [12], pois o mesmo defende que a compreensão de um processo matemático se mostra mais evidente quando se coordena, no mínimo, dois registros de representações semióticas. Além disso, os resultados sugerem a importância do uso da geometria como ferramenta de registro nos problemas que utilizam vetores na forma gráfica, como foi apresentado no teste. Por conta disso, parece ter sido um registro de representação que colaborou para uma maior compreensão dos itens e, portanto, foi escolhido pela maioria do Grupo B para que nele fossem executados os tratamentos.

Enfim, foi possível perceber ainda que a soma de vetores em direção ortogonal, e consequentemente em outras direções aleatórias, não é intuitiva para todos os alunos, mesmo que haja exemplos concretos possivelmente mobilizáveis no cotidiano deles os quais poderiam ter sido usados como conhecimentos prévios. Isso pode ser inferido porque o número de respostas parcialmente corretas representou a minoria de 33,3% de acertos. Dessa maneira, reforça-se a hipótese do uso das construções geométricas para instigar as conjecturas pelos alunos em relação à soma de vetores.

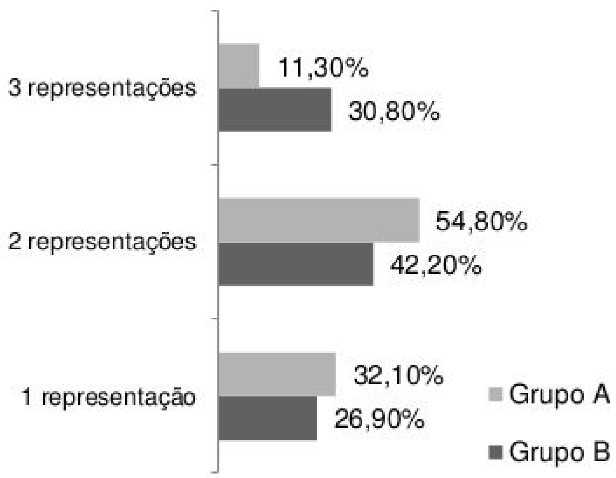


Figura 9: Número de representações utilizadas na resolução da terceira questão do teste separado por grupo.

4.2 Pós-teste

Inicialmente, verificaram-se a coerência das resoluções dos testes em relação às respostas esperadas. Puderam-se perceber quatro tipos distintos de respostas: totalmente incoerentes, parcialmente coerentes, ou pelo acerto da direção da força resultante ou pelo acerto da intensidade, e totalmente coerentes. Esses dados estão podem ser visualizados na Figura 10.

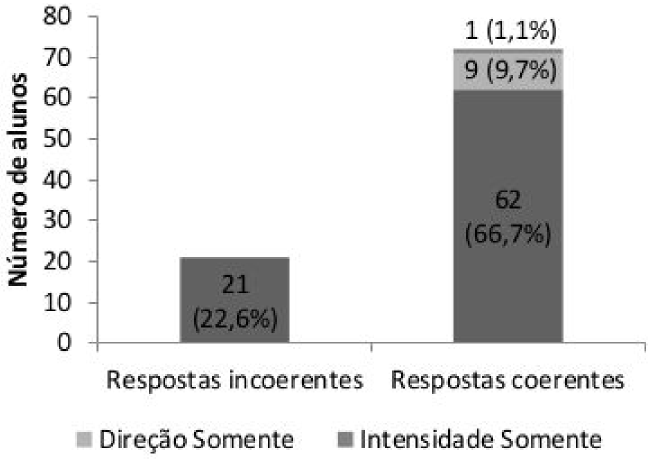


Figura 10: Relação de respostas coerentes e incoerentes em relação à prova-espelho.

Apesar de o pré-teste e o pós-teste não corresponderem às mesmas questões, portanto não apresentam exatamente os mesmos parâmetros de comparação para inferir com um pouco mais de segurança em relação à aprendizagem significativa e à evolução dos alunos em relação ao raciocínio requerido, no último teste o número de acertos (totais ou parciais) foi superior em relação ao primeiro em quase 50%. Na primeira avaliação, foram 26 os alunos que acertaram a direção do vetor resultante no item que apresentava um raciocínio análogo ao da segunda avaliação, no qual o número de acertos subiu para 72, sendo que, desses, 62 acertaram também o cálculo para a intensidade, fato que não aconteceu no pré-teste.

O fato de ter ocorrido um aumento no número de acertos pode evidenciar uma efetividade da sequência aplicada a partir da utilização das construções geométricas e da metodologia de trabalho desenvolvida. Todavia, ainda foi possível identificar outro fator que colabora para fortalecer tal argumento: o largo uso do registro geométrico na prova aplicada após a exploração do conteúdo. É evidente que esse resultado é tendencioso, haja vista a maneira como a proposta foi desenvolvida, contudo não deixa de ratificar o argumento de que as representações inerentes à geometria apresentam subsídios satisfatórios para que os tratamentos relativos à soma vetorial sejam realizados.

Mais do que corroborar o uso do registro geométrico como bom espaço para os tratamentos, uma nova análise das provas que apresentaram respostas condizentes com as desejadas permitiu identificar um vasto uso das operações geométricas feitas sobre os vetores fornecidos na própria questão, o que permite inferir que a utilização da régua em compasso também se caracterizou como um tratamento na resolução do teste e não só como uma forma de representar o ente matemático referido. A Figura 11 mostra que, nos testes com respostas favoráveis a utilização da geometria aparece na maioria absoluta das resoluções.

Figura 11: Uso do registro geométrico pelos alunos que acertaram total ou parcialmente a questão proposta.

De acordo com os dados mostrados na Figura 11, dos 63 testes cujos cálculos para a intensidade do vetor resultante estavam corretos, somente um não apresentava o registro geométrico, possivelmente porque o aluno conseguiu passar mentalmente do registro geométrico para o simbólico sem fazer os tratamentos naquele primeiro campo. Essa evidência, permite desconfiar que o tratamento feito no registro geométrico pode facilitar a criação de conjecturas pelos alunos, visto que exibe com mais clareza o triângulo retângulo que direciona ao Teorema de Pitágoras, assim como defende o texto dos PCNs [8].

Por último, outro fator interessante a ser considerado são os registros de representação semiótica utilizados pelos alunos que apresentaram respostas divergentes das esperadas. Mesmo não apresentando a resolução correta, 14 desses 21 alunos mobilizaram representações geométricas. Somando todos os testes que apresentaram a geometria como um dos campos de resolução da questão no pós-teste, foram obtidos 83,9% do total de avaliações, enquanto que, no pré-teste, essa frequência foi de 32,2%. Esses valores mostram um aumento significativo da mobilização desse registro após o conhecimento desse pelos alunos, o que sugere uma boa aceitação dos alunos, o que fica como uma informação interessante para os professores.

5 Considerações finais

Como proposta inicial de trabalho, tinha-se o objetivo de se analisar os tipos de representações semióticas mobilizadas pelos alunos a partir somente de seus conhecimentos prévios na resolução de problemas envolvendo a operação de soma vetorial e realizar uma sequência didática utilizando tratamentos proporcionados pelas ferramentas do Desenho Geométrico.

Após a análise dos dados obtidos por meio dos instrumentos utilizados para exprimir as representações semióticas mobilizadas pelos alunos ao resolverem problemas de soma vetorial, pôde-se perceber algum tipo de correlação entre o uso de variados registros, em que um deles era a geometria, com o número de acertos às questões, principalmente quando analisados os aspectos que se relacionam à direção e intensidade dos entes matemáticos resultantes de uma soma. O registro geométrico, possivelmente por conta do caráter da sequência didática utilizada, passou a ser mais utilizado pelos alunos, que também utilizaram régua e compasso para fazer tratamentos.

Tais dados, como explicitados acima, revelam não uma melhor técnica de uso ou um método que promova uma melhor aprendizagem significativa, mas uma alternativa possível para se trabalhar a soma vetorial a partir do Desenho Geométrico. Isso se mostra importante para aqueles que se inquietam em relação às questões do ensino de vetores, visto que já é consenso na literatura de que a probabilidade de aprendizagem pelos alunos é aumentada de forma significativa quando experiências diversas de ensino e aprendizagem são fornecidas aos estudantes.

De acordo com o exposto, acredita-se, então, que o trabalho com vetores utilizando régua e compasso, seja nas aulas de física, matemática ou desenho geométrico, possa caracterizar-se como atividade diversificada capaz de motivar os estudantes a compreenderem um assunto que, segundo a revisão bibliográfica aqui apresentada, abarca um raciocínio elaborado e abstrato, o qual oferece um nível de dificuldade considerável por não ter um caráter intuitivo. Dessa forma, essa metodologia de trabalho fica, também, como uma sugestão para a prática docente de professores que se encontrem inseridos em uma problemática similar à apresentada, de modo que podem vislumbrar mais uma alternativa para o trabalho com geometria vetorial.

Referências

[1] PIETROCOLA, M. *A Matemática como estruturante do conhecimento físico.* Caderno Brasileiro de Ensino de Física, v.19, n.1, 2002.

[2] POYNTER, A. e TALL, D. *What domathematics and physics teachers think that students will find difficult? A challenge to accepted practices of teaching, in D. Hewitt e Noyes A. (Eds)* Anais da sexta britânico Congresso de Educação Matemáticarealizada na Universidade de Warwick, 2005.

[3] CARVALHO, L. O. e VILLANI, A. *Aprendizagem dos princípios de conservação em entrevistas. Investigações em Ensino de Ciências* v.1, n.1, 1996.

[4] MENON. M. J. *Sobre as origens das definições dos produtos escalar e vetorial.* Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 31, n. 2, 2305, 2009.

[5] BITTAR, M. *A teoria dos campos conceituais e o ensino de vetores no ensino secundário francês.* In:Anais da 25 Reunião Anual da Anped.Caxambú: Anped, 2002.

[6] CARNEIRO, P. S. *Geometria vetorial na escola: uma leitura geométrica para sistemas de equações.* Porto Alegre, 213 p., 2007. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

[7] ANDRADE, E.V. *Representação vetorial e Grandezas físicas nos livros de Física adotados pelo PNLD para 2012: a necessária convergência para além da Matemática.* 2012. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia.

[8] ZUIN, Elenice de Souza Lodron. *Da régua do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no brasil.* 2001. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

[9] OLIVEIRA, Clézio Lemes de. *Importância do desenho geométrico.* 2005. 8 f., 2005. Dissertação (Licenciatura) – Universidade Católica de Brasília, Brasília.

[10] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática (3º e 4º ciclos do ensino fundamental).* v. 3. Brasília: MEC, 1998.

[11] DUVAL, Raymond. *Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática.* In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara.Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica. 4. ed. Campinas: Papirus, 2008. Cap. 1, p. 11-34.

[12] DUVAL, Raymond. *A cognitive analisis of problems of comprehension in a learning of mathematics.* Education Studies In Mathematics, [s. l.], p.103-131, 2006.

[13] DUVAL, Raymond. *Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking.* Proceedings Of The Annual Meeting Of The North American Chapter Of Mathematics Education, Cuernavaca, n. , p.2-27, 1999.

[14] CASTRO, Samira Choukri de. *Os vetores do plano e do espaço e os registros de representação.* 2001. 111 f. Dissertação (Mestrado) - PUC-SP, São Paulo, 2001.

[15] BARREIRO, Simone Navas; KARRER, Mônica. *Estudo de vetores no R3: Uma abordagem envolvendo conversões de registros semióticos, com auxílio do software Cabri-Géomètre 3D.* In: I Jornada de iniciação científica e tecnológica. São Paulo, 2008: UNIBAN, 2008. p. 1 - 3.

[16] LEITHOLD, Louis. *O cálculo com geometria analítica.* 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. 2 v.

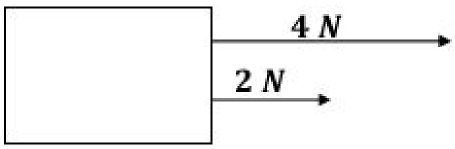
VETORES

Nome: ____ Turma: 8º _____

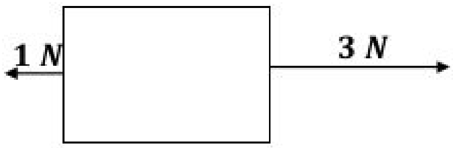
A partir de seus conhecimentos, analise a situação abaixo.

Nos itens a seguir, estão representadas algumas caixas as quais foram submetidas a forças como as representadas pelos vetores indicados nas imagens. Em cada caso, indique o valor da força resultante, bem como sua direção e sentido.

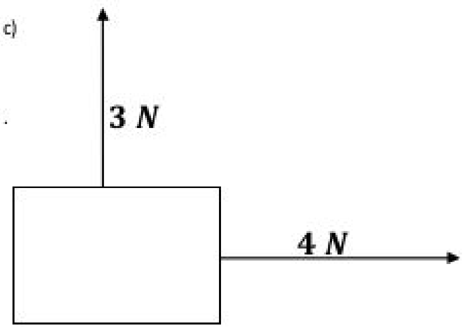
a)



b)



c)

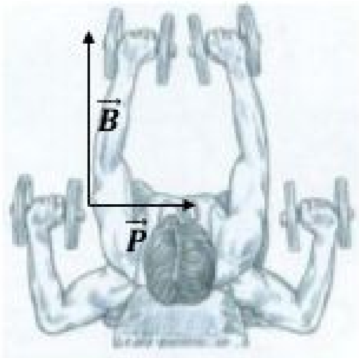


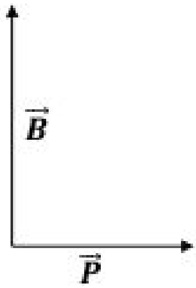
VETORES

Nome: ____ Turma: 8º _____

Responda à questão abaixo.

Um bom exercício para desenvolvimento do tórax é o crucifixo, esquematizado abaixo. Nele, o pesinho faz uma trajetória resultante da ação de uma força para cima exercida pelos músculos do braço (B) e outra direcionada para dentro, exercida pelos músculos do peito (P). Os vetores apresentados na ampliação à direita possuem o tamanho proporcional às forças as quais representam: $|\vec{P}| = 400$ N e $|\vec{B}| = 300$ N.





Sabendo que a junção das duas forças faz com que o pesinho se erga à frente do tronco, indique a direção da força resultante da soma entre $\vec{P}$ e $\vec{B}$ e sua intensidade.