Buraco Negro no Gravitomagnetismo Teleparalelo

H.D.L. da Silva[*] V.C. de Andrade[†]

Universidade de Brasília

Resumo

O gravitomagnetismo configurou-se como uma grande demonstração do potencial da Relatividade Geral. No limite de campos fracos, as equações de Einstein prevêem campos análogos aos campos elétrico e magnético do eletromagnetismo. Tais campos são denominados gravitoelétrico e gravitomagnético, respectivamente. A gravidade teleparalela, teoria equivalente à Relatividade Geral, surge como uma teoria de calibre com potencial de resolver o problema da quantização. A abordagem do teleparalelismo apresenta uma grande afinidade com outras teorias sobre interações fundamentais. A proposta do presente trabalho é analisar o gravitomagnetismo do ponto de vista da gravidade teleparalela, mostrando suas semelhanças com o eletromagnetismo.

1 Introdução

No início do século XX, a Relatividade Geral (RG) surgiu como um dos pilares da física moderna, juntamente com a mecânica quântica. Desde então, tem se mostrado uma das teorias mais bem sucedidas da Física. Seu triunfo e seu sucesso advém da explicação da precessão do periélio de Mercúrio, bem como da predição de uma série de novos fenômenos, como a existência de buracos negros, o fenômeno de lentes gravitacionais, *redshift* gravitacional, e expansão cósmica. A RG rompeu com a noção que tinhamos em relação ao tempo e ao espaço, traçando uma nova era na Física.

Muito embora a RG tenha trilhado um caminho de grande sucesso, problemas não tardaram a aparecer. Dentre os mais emblemáticos, podemos citar o problema da quantização do campo gravitacional e o problema da definição de um tensor energia-momento para o campo gravitacional. Dessa forma, a gravidade vem sendo mantida à parte das outras interações fundamentais, essas descritas por meio de teorias de calibre. Entretanto, o sonho da criação de uma teoria unificada ainda permanece.

O teleparaelismo surge, então, como uma teoria alternativa e equivalente à RG. Diferentemente da RG, o teleparalelismo é descrito por uma teoria de calibre semelhante à Teoria Eletromagnética. Há, portanto, uma similaridade na

[*]Instituto de Física, Universidade de Brasília. E-mail: hugodlopess@gmail.com

[†]Instituto de Física, Universidade de Brasília. E-mail: andrade@fis.unb.com

descrição dessas duas interações fundamentais. O gravitomagnetismo teleparalelo surge a partir de campos análogos aos campos do eletromagnetismo. Mais especificamente, os campos gravitoelétrico e gravitoemagnético são construídos a partir de uma generalização gravitacional do tensor de Faraday, ou seja ${F^a}_{\mu\nu}$, que é, por sua vez, relacionado à torção do espaço-tempo. Suas componentes resultam nas versões gravitacionais de ${E^a}_\mu$ e ${B^a}_\mu$. Na RG, a construção das componentes de E e B estão relacionadas ao tensor de Riemann ou à métrica, e pressupõe, na maior parte da literatura, a hipótese de campo fraco.

2 Relatividade Geral

2.1 O princípio de equivalência

Uma característica marcante do movimento de corpos em um campo gravitacional é que ele independe das características do corpo, como massa ou carga elétrica. Dois corpos diferentes se movem da mesma maneira caso sejam colocados nas mesmas condições iniciais. Isso nos permite traçar um paralelo entre o movimento dos corpos em um campo gravitacional e o movimento dos corpos livres observados a partir de um referencial não inercial. Em um sistema de referência inercial, os movimentos livres de dois corpos diferentes, colocados sob as mesmas condições iniciais, serão os mesmos. Se, então, esse movimento for observado a partir de um sistema não-inercial, veremos os dois corpos executarem o mesmo movimento. Assim, as características do movimento em um sistema de referência não-inercial são as mesmas do movimento em um sistema de referência inercial com um campo gravitacional. Em outras palavras, um referencial não-inercial é equivalente a um campo gravitacional. [5]

O exemplo mais claro é o movimento livre em um referencial uniformemente acelerado. Um corpo movendo-se livremente apresenta, em relação a esse referencial uniformemente acelerado, uma aceleração oposta e de mesmo módulo da aceleração do referencial. Esse sistema de referência não-inercial é equivalente a um campo gravitacional uniforme.

Entretanto, é importante ressaltar que campos gravitacionais equivalentes a referenciais não-inerciais não são idênticos a campos gravitacionais reais existentes em referenciais inerciais. Campos gravitacionais reais tendem a zero quando a distância à fonte tende ao infinito. Em referenciais não-inerciais, a aceleração ou permanece constante, no caso de um referencial acelerado, ou tende a infinito, no caso de um referencial em rotação, quando vamos para longe da origem do sistema. Portanto, campos gravitacionais equivalentes a referencais não-inerciais se anulam em todo lugar quando passamos a um referencial inercial. Por outro lado, campos reais só se anulam localmente.

Quando passamos para a mecânica relativística, a propriedade de que diferentes corpos, sob as mesmas condições iniciais, se movem de forma idêntica em campos gravitacionais permanece válida. Partimos do pressuposto de que a equivalência entre referenciais não-inerciais e campos gravitacionais permanece também válida até certo ponto. Em um referencial inercial, o intervalo de espaço tempo é dado por:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{1}$$

Nessa equação, c é a velocidade da luz.[5][1] Passando para um sistema de coordenadas em rotação uniforme da forma

$$x = x' \cos \Omega t - y' \sin \Omega t \ , \ y = x' \sin \Omega t + y' \cos \Omega t, \ z = z'$$

temos

$$\begin{aligned} ds^2 = [c^2 - \Omega^2(x'^2 - y'^2)]dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + \\ +2\Omega y'dx'dt - 2\Omega x'dy'dt \end{aligned} \tag{2}$$

que se reduz à forma compacta

$$-ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \tag{3}$$

com

$$dx^0 = cdt, dx^1 = dx, dx^2 = dy, dx^3 = dz.$$

Assumimos que o intervalo de espaço tempo em um campo gravitacional seja da forma (3)

2.2 Equação da geodésica

Dentre todos os caminhos possíveis entre dois eventos no espaço-tempo, uma partícula livre em um campo gravitacional percorrerá aquele para o qual o funcional

$$S = \int \sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau \tag{4}$$

respeite a condição $\delta S = 0$.

Usando as equações e Euler-lagrange, chegamos às equações do movimento:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\sigma\beta}\frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \tag{5}$$

[2]

2.3 As equações de campo de Einstein

As equações de campo procuradas devem ser encontradas variando-se uma ação com respeito à métrica:

$$S = S_g + S_m \tag{6}$$

A parte S_g corresponde à parte do campo, estendida por todo espaço e calculada entre dois instantes da componente temporal. A parte S_m corresponde à matéria [5]. Vamos variá-las separadamente.
A Ação de Einsten-Hilbert é da forma:

$$S_g = \frac{c^3}{16\pi G}\int R\sqrt{-g}d\Omega \tag{7}$$

em que R é o escalar de Ricci e g é o determinante da métrica. Variando S_g, temos:

$$\delta \int R\sqrt{-g}d\Omega = \delta \int g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\sqrt{-g}d\Omega =$$

$$= \int (R_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} + R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\delta\sqrt{-g} + g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu})d\Omega$$

Mas

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$$

Então:

$$\delta \int R\sqrt{-g}d\Omega = \int (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d\Omega + \int g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\sqrt{-g}d\Omega$$

Embora não vá ser demonstrado, o segundo termo do lado direito da equação é igual a zero. Portanto, temos:

$$\delta S_g = \frac{c^3}{16\pi G}\int (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d\Omega \tag{8}$$

A parte correspondente à matéria é:

$$S_m = \frac{1}{c}\int \Lambda\sqrt{-g}d\Omega \tag{9}$$

Variando essa equação, temos:

$$\delta S_m = \frac{1}{c}\int \left(\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\frac{g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}}\delta\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right)d\Omega$$

Usando:

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\frac{g^{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}} - \frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{\mu\nu}}$$

então:

$$\delta S_m = -\frac{1}{2c}\int T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}d\Omega \tag{10}$$

Juntando (8) e (10) e levando-se em conta que $\delta g^{\mu\nu}$ são arbitrários, temos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{11}$$

2.4 A Solução de Schwarzschild

Uma aplicação imediata da RG está na descrição de campos gravitacionais gerados por planetas e estrelas.[1][2] Nesse caso, estamos falando de campos gravitacionais esfericamente simétricos. Para analisar o movimento dos corpos sob a influência desse tipo de campo gravitacional, precisamos resolver as equações de Einstein no vácuo, ou seja $T_{\mu\nu} = 0$.

É conveniente usar a assinatura (-,+,+,+) para a métrica de Minkowiski, estabelecendo também que $c = 1$. A métrica de *Minkowiski*, em coordenadas esféricas $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$, fica:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{12}$$

com $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$

Vamos agora procurar soluções de vácuo, ou seja:

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{13}$$

A fonte é hipoteticamente estática e esfericamente simétrica. As soluções procuradas devem ter essas características.

A hipótese de estaticidade estabelece duas condições para a métrica procurada:

- todas as componentes da métrica independem da coordenada temporal.
- não há termos cruzados da forma $(dtdx^i + dx^i dt)$, pois a métrica não seria invariante sob inversão temporal. Os índice "i"corresponde às coordenadas espaciais.

Levando-se em conta que o espaço-tempo é plano longe da fonte, devemos obter a métrica de Minkowiski para distâncias muito grandes. Supomos, então, uma métrica da forma

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + e^{2\beta(r)}dr^2 + e^{2\gamma(r)}r^2 d\Omega^2 \tag{14}$$

com α, β, γ funções arbitrárias de r.

$e^{2\gamma(r)}$ deve multiplicar todos os temos de $d\Omega^2$ para que a simetria esfética seja mantida.

Para simplificar a métrica antes de aplicar as equações de Einstein, façamos a seguinte mudança de coordenada:

$$\bar{r} = e^{2\gamma(r)}r \tag{15}$$

Em termos dessa nova variável, a métrica (14) fica:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + \left(1 + r\frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} e^{(2\beta(r) - 2\gamma(r))}d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2 \tag{16}$$

em que $r = r(\bar{r})$. Todas as funções de r são, portanto, funções de $\bar{r}$. Vamos fazer as seguintes rotulações:

$$\bar{r} \to r$$

$$\left(1 + r\frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2} e^{(2\beta(r) - 2\gamma(r))} \to e^{2\beta}$$

Assim, a métrica fica:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + e^{2\beta(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{17}$$

Vamos usar as equações de Einstein para encontrar α e β. Podemos usar a métrica acima para calcular as componentes do tensor de Ricci. As componentes não nulas são:

$$R_{tt} = e^{2(\alpha-\beta)}\left[\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}\partial_r\alpha\right] \tag{18}$$

$$R_{rr} = -\partial_r^2\alpha - (\partial_r\alpha)^2 + \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}\partial_r\beta \tag{19}$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-2\beta}[r(\partial_r\beta - \partial_r\alpha) - 1] + 1 \tag{20}$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta} \tag{21}$$

Cada uma dessas componentes são iguais a zero para a solução de vácuo. Como R_{tt} e R_{rr} são zero independentemente, podemos escrever:

$$0 = e^{2(\beta-\alpha)}R_{tt} + R_{rr} = \frac{2}{r}(\partial_r\alpha + \partial_r\beta) \tag{22}$$

Isso implica que $\alpha = -\beta + k$, sendo k uma constante. Se fizermos $t \to e^{-k}t$, podemos fazer k igual a zero. Assim:

$$\alpha = -\beta \tag{23}$$

Fazendo $R_{\theta\theta} = 0$, temos:

$$e^{2\alpha}(2r\partial_r\alpha + 1) = 1$$

ou

$$\partial_r(re^{2\alpha}) = 1$$

Resolvendo, temos:

$$e^{2\alpha} = 1 - \frac{R_s}{r} \tag{24}$$

O limite de campos fracos mostra que $R_s = 2GM$. Com isso, temos a métrica procurada, conhecida como métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{25}$$

R_s é conhecido como raio de Schwarschild.

Podemos perceber que, quando $r \to \infty$, recobramos a métrica de Minkowski.

3 Uma teoria de calibre: o eletromagnetismo

3.1 Ação para uma partícula lívre

Para determinar o movimento de uma partícula em relação a um determinado sistema de referência, temos de escrever as equações de movimento partindo do princípio da mínima ação. De acordo com a relatividade especial, as leis físicas devem independer do referencial inercial escolhido. Para tal, a ação dessa partícula deve ser invariante sob transformação de Lorentz [5]. Segue que ela deve depender de um escalar. Portanto, o diferencial deve ser múltiplo do intervalo de espaço-tempo ds. Assim, temos a seguinte forma para a ação:

$$S = -\alpha \int_a^b ds \tag{26}$$

em que α é uma constante que descreve a natureza da partícula e que:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{27}$$

Essa é uma integral ao longo da linha de mundo da partícula, entre dois eventos nos t_1 e t_2 instantes.

Uma ação pode ser representada como uma integral em relação ao tempo da forma:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \tag{28}$$

em que L é a lagrangiana do sistema. Usando o fato de que:

$$d\tau = \frac{ds}{c} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{29}$$

temos:

$$S = -\int_{t_1}^{t_2} \alpha c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \tag{30}$$

A lagrangiana é, então:

$$L = -\alpha c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{31}$$

Sabemos que, para $v << c$, a lagrangiana é da forma:

$$L = \frac{mv^2}{2} + k \tag{32}$$

em que k é uma constante.

Quando $v << c$, a equação (31) fica:

$$L = -\alpha c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \frac{\alpha v^2}{2c} - \alpha c \tag{33}$$

Então, a constante α é $\alpha = mc$. A ação procurada é:

$$S = -\int_{t_1}^{t_2} mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \tag{34}$$

3.2 Ação para uma partícula em um campo eletromagnético

Em um campo eletromagnético, a partícula está submetida a um quadripotencial $A^\mu = (\phi, \vec{A})$. O acoplamento entre a partícula e o campo é mediado por uma quantidade chamada carga elétrica da partícula, escrita por e. [5] O termo de interação da ação é da forma:

$$S = -\frac{e}{c}\int_a^b A_\mu dx^\mu \tag{35}$$

Então, a ação para uma partícula em um campo eletromagnético é:

$$S = \int_a^b (-mcds - \frac{e}{c}A_\mu dx^\mu) \tag{36}$$

sabendo que $ds = \sqrt{dx_\mu dx^\mu}$. Vamos variar essa ação.

$$\delta S = -\int \left(mc\frac{dx_\mu d\delta x^\mu}{ds} + \frac{e}{c}A_\mu d\delta x^\mu + \frac{e}{c}\delta A_\mu dx^\mu \right) = 0 \tag{37}$$

Integrando os dois primeiros termos por partes e colocando $u_\mu = \frac{dx_\mu}{ds}$, temos

$$\int \left(mcdu_\mu \delta d^\mu + \frac{e}{c}\delta x^\mu dA_\mu - \frac{e}{c}\delta A_\mu dx^\mu \right) -$$
$$- \int \left[\left(mcu_\mu + \frac{e}{c}A_\mu \right) \delta x^\mu \right] = 0$$

A segunda integral é zero, pois variamos com valores fixos das coordenadas nos limites de integração. Além disso, temos:

$$\delta A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\delta x^\nu \tag{38}$$

e

$$dA_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}dx^\nu \tag{39}$$

Usando $du_\mu = \left(\frac{d\mu}{ds}\right)ds$ e $dx^\mu = u^\mu ds$, fazemos um rearranjo dos termos e obtemos:

$$\int \left[mc\frac{du_\mu}{ds} - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) u^\nu \right] \delta x^\mu ds = 0 \tag{40}$$

Chamando $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$ e sabendo da arbitrariedade de δx^μ, temos:

$$mc\frac{du_\mu}{ds} = \frac{e}{c}F^{\mu\nu}u_\nu \tag{41}$$

Essa é a equação do movimento para a partícula em um campo eletromagnético. $F^{\mu\nu}$ é o chamado tensor eletromagnético. Pode-se demonstrar que, na obtenção dessa equação, poderia ser usado um potencial da forma:

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \tag{42}$$

A invariância dos fenômenos físicos sob essa transformação é chamada de invariância de calibre. Dessa forma, o eletromagnetismo é uma teoria de calibre. Na Relatividade Geral, não há um tensor análogo ao tensor eletromagnético para o campo gravitacional.

3.3 As equações de Maxwell

Vamos reescrever a equação (36) da seguinte maneira:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(- mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} - e\phi \right) dt \tag{43}$$

Variando essa ação, obtemos a seguinte equação de movimento:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{e}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - e\nabla\phi + \frac{e}{c}\vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) \tag{44}$$

Chamamos

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\phi \tag{45}$$

e

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{46}$$

Nessas equações, $\vec{E}$ é o campo elétrico e $\vec{B}$ é o campo magnético. A partir dessas equações, podemos escrever expressões apenas com $\vec{E}$ e $\vec{B}$. O resultado é:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{47}$$

e

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{48}$$

Vamos expressá-las em notação quadridimensional. Usando a definição do tensor eletromagnético, é fácil verificar que ambas podem ser escritas da forma:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x^{\nu}} = 0 \tag{49}$$

Definindo a 4-corrente elétrica como $J^{\mu} = (c\rho, \vec{J})$, podemos reescrever as equações

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \tag{50}$$

e

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{J} \tag{51}$$

da seguinte forma:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = -\frac{4\pi}{c}J^{\mu} \tag{52}$$

4 Gravitomagnetismo no Contexto da Gravidade Teleparalela

4.1 introdução

As primeiras ideias referentes ao gravitomagnetismo repousam em uma analogia entre a lei de Newton da gravitação e a Lei de Coulomb da eletrostática. Ambas têm as mesmas propriedades geométricas no regime estático. Dessa analogia básica surge a ideia de que massas em movimento poderiam gerar um campo análogo ao campo magnético. [3][4]

Trabalhos subsequentes à publicação original sobre a RG mostraram que, de fato, massas em movimento geram um campo análogo ao magnético. Muitos autores investigaram as equações de Einstein no contexto de perturbações em relação ao espaço de Minkowski.

As semelhanças entre as equações de Einstein linearizadas e as equações de Maxwell se tornaram evidentes. Desse estudo, surge a previsão teórica do campo gravitomagnético associado à correntes de massa. Nas seções seguintes, vamos investigar o gravitomagnetismo no contexto da gravidade teleparalela. No que se segue, letras gregas $(\mu, \nu, \sigma, ... = 0, 1, 2, 3)$ denotarão os índices do espaço-tempo. A primeira metade das letras latinas $(a, b, c.. = 0, 1, 2, 3)$ e índices em parênteses representarão os índices do espaço tangente. A segunda metade das letras latinas $(i, j, k...)$ com valores 1, 2 e 3 representarão as componentes espaciais dos tensores.

4.2 Ideias Básicas da Gravidade Teleparalela

A teoria é baseada em um campo de força análogo ao tensor eletromagnético. O definimos como:

$$F^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu = h^a{}_\rho \, T^\rho{}_{\mu\nu} \, . \tag{53}$$

Nessa equação, $A^a{}_\mu$ é o potencial de calibre de translação e $h^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + A^a{}_\mu$ é o campo de tetradas. O campo gravitacional é representado pela torção $T^\rho{}_{\mu\nu}$. Observe que há uma diferença em relação à Relatividade Geral, onde o campo gravitacional é representado pela curvatura. O campo de força é, assim, escrito na base do campo de tetradas. [3][4]
A dinâmica dos campos de calibre serão determinadas a partir da seguinte lagrangiana:

$$\mathcal{L}_G = \frac{h}{16\pi G} \, S^{\rho\mu\nu} \, T_{\rho\mu\nu} \, , \tag{54}$$

em que $h = \det(h^a{}_\mu)$.

$$S^{\rho\mu\nu} = -S^{\rho\nu\mu} \equiv \frac{1}{2} \left[K^{\mu\nu\rho} - g^{\rho\nu} \, T^{\theta\mu}{}_\theta + g^{\rho\mu} \, T^{\theta\nu}{}_\theta \right] \tag{55}$$

é chamado de superpotencial.

As equações de vácuo advindas dessa lagrangiana são

$$\partial_\sigma(hS_a{}^{\sigma\rho}) - 4\pi G(hj_a{}^\rho) = 0 \tag{56}$$

com

$$j_a{}^\rho \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h^a{}_\rho} = \frac{h_a{}^\lambda}{4\pi G}(F^c{}_{\mu\lambda}S_c{}^{\mu\rho} - \frac{1}{4}\delta_\lambda{}^\rho F^c{}_{\mu\nu}S_c{}^{\mu\nu}) \tag{57}$$

sendo $j_a{}^\rho$ a corrente de energia-momento de gauge.

4.3 Equações de Maxwell Gravitacionais

Nessa seção, vamos deduzir as equações gravitacionais equivalentes às equações de Maxwell.
A Gravidade Teleparalela como uma teoria de calibre (gauge) apresenta uma similaridade com o eletromagnetismo. Por esse motivo, os campos gravitoelétrico e gravitomagnético surgirão por analogia direta com os campos elétrico e magnético do eletromagnetismo.[4]

Vamos, primeiro, considerar os campos gravitoelétrico e gravitomagnético como componentes do campo de força generalizado:

$$S_a{}^{0i} = E_a{}^i, \tag{58}$$

$$S_a{}^{ij} = \epsilon^{ijk}B_{ak}. \tag{59}$$

Duas propriedades imediatas dessas definições é que $E_a{}^i$ e B_{ak} se transformam covariantemente sob transformações de lorentz de espaço-tangente locais e são vetores sob rotação no espaço tridimensional.

Vamos tentar, a partir da equação (44), obter os análogos das duas primeiras equações de Maxwell. Esperamos encontrar o equivalente a lei de Gauss para $\rho = 0$. Para $\rho = q$, esperamos encontrar uma lei equivalente à de Ampère.

Para $\rho = 0$, obtemos

$$\partial_i(hE_a{}^i) = 4\pi G(hj_a{}^0). \tag{60}$$

Vemos, então, que a escolha do superpotencial como um campo de força generalizado produz uma equação análoga a do divergente de $\vec{E}$ a menos de uma constante, o determinante do campo de tetradas. Podemos interpretar $hj_a{}^0$ como a fonte do campo gravitoelétrico.

Vamos considerar $\rho = q$. Podemos escrever a equação resultante como:

$$\epsilon^{qjk}\partial_j(hB_{ak}) - \partial_0(hE_a{}^q) = 4\pi G(hj_a{}^q). \tag{61}$$

Vemos que essa equação é similar à lei de Ampère com fonte $hj_a{}^q$.

Assim como no eletromagnetismo, o segundo par de equações surge a partir das características geométricas da teoria. Vamos usar a identidade de Bianchi para a Gravidade Teleparalela:

$$\partial_\rho F^a{}_{\mu\nu} + \partial_\mu F^a{}_{\nu\rho} + \partial_\nu F^a{}_{\rho\mu} = 0. \tag{62}$$

Partindo da relação entre o campo de força e o superpotencial escrito da forma

$$F^a{}_{\gamma\delta} = 2h^b{}_\gamma g_{\rho\delta} h^a{}_\mu S_b{}^{\mu\rho} - 2h^b{}_\delta g_{\nu\gamma} h^a{}_\mu S_b{}^{\mu\nu} - \\ -h^a{}_\delta g_{\nu\gamma} h^b{}_\theta S_b{}^{\theta\nu} + h^a{}_\gamma g_{\rho\delta} h^b{}_\theta S_b{}^{\theta\rho}$$

e indroduzindo-o na identidade de Bianchi teleparalela, temos a seguinte equação:

$$\partial_\sigma \left[\mathcal{O}^{ba}{}_{\gamma i\delta} E_b{}^i + \mathcal{P}^{ba}{}_{\gamma ij\delta} \epsilon^{ijk} B_{bk}\right] + \\ +\partial_\gamma \left[\mathcal{Q}^{ba}{}_{\delta i\sigma} E_b{}^i + \mathcal{R}^{ba}{}_{\delta ij\sigma} \epsilon^{ijk} B_{bk}\right] + \\ +\partial_\delta \left[\mathcal{S}^{ba}{}_{\sigma i\gamma} E_b{}^i + \mathcal{T}^{ba}{}_{\sigma ij\gamma} \epsilon^{ijk} B_{bk}\right] = 0$$

Os primeiros coeficientes têm a seguinte forma explícita:

$$\mathcal{O}^{ba}{}_{\gamma i\delta} = 2h^b{}_\gamma h^a{}_0 g_{i\delta} - 2h^b{}_\gamma h^a{}_i g_{0\delta} - \\ -2h^b{}_\delta h^a{}_0 g_{i\gamma} + 2h^b{}_\delta h^a{}_i g_{0\gamma} + \\ +h^a{}_\delta h^b{}_0 g_{i\gamma} - h^a{}_\delta h^b{}_i g_{0\gamma} - h^a{}_\gamma h^b{}_0 g_{i\delta} + h^a{}_\gamma h^b{}_i g_{0\delta} \tag{63}$$

$$\mathcal{P}^{ba}{}_{\gamma ij\delta} = 2h^b{}_\gamma h^a{}_i g_{j\delta} - \\ -2h^b{}_\delta h^a{}_i g_{j\gamma} + h^a{}_\delta h^b{}_i g_{j\gamma} - h^a{}_\gamma h^b{}_i g_{j\delta} \tag{64}$$

a partir de $\mathcal{O}^{ba}{}_{\gamma i\delta}$ e $\mathcal{P}^{ba}{}_{\gamma ij\delta}$, nós obtemos $\mathcal{Q}^{ba}{}_{\delta i\sigma}$ e $\mathcal{R}^{ba}{}_{\delta ij\sigma}$ mudando índices ($\gamma \to \delta$ e $\delta \to \sigma$) . Obtemos $\mathcal{S}^{ba}{}_{\sigma i\gamma}$ e $\mathcal{T}^{ba}{}_{\sigma ij\gamma}$ fazendo ($\gamma \to \sigma$ and $\delta \to \gamma$).

As equações acima se mostram similares às equações de Maxwell no limite de campos fracos.

4.4 Aplicação à solução de Schwarzschild

Vamos examinar as colocações acima no exemplo da solução de Schwarzschild [4] A métrica encontrada acima, agora escrita com assinatura (+,-,-,-) é a seguinte:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2mG}{r}\right) dt^2 - \\ -\left(1 - \frac{2mG}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \tag{65}$$

em que G é a constante gravitacional e m é a massa do objeto. A escolha do observador, que corresponde a um campo de tetradas específico associadas à métrica de Schwarzshild, é importante para as nossas conclușões sobre os campos $\vec{E}^a_\mu$ e $\vec{B}^a_\mu$. Escolhemos um conjunto de tetradas que corresponde a um observador estacionário localizado no infinito. Essa tetrada também precisa satisfazer as condições de calibre temporais e ter simetria na parte espacial. Assim, temos o seguinte campo de tetradas:

$$h^a{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{11} sin\theta cos\phi & rcos\theta cos\phi & -rsin\theta sin\phi \\ 0 & \gamma_{11} sin\theta sin\phi & rcos\theta sin\phi & rsin\theta cos\phi \\ 0 & \gamma_{11} cos\theta & -rsin\theta & 0 \end{pmatrix}, \tag{66}$$

em que $\gamma_{00} = \sqrt{g_{00}}$ e $\gamma_{11} = \sqrt{-g_{11}}$ A torção pode ser escrita em termos da tetrada da seguinte forma:

$$T^\sigma{}_{\mu\nu} = h_a{}^\sigma \partial_\mu h^a{}_\nu - h_a{}^\sigma \partial_\nu h^a{}_\mu \tag{67}$$

As componentes não zero são dadas por

$$T^0{}_{01} = -\frac{GM}{r^2} g_{00}^{-1}, \tag{68}$$

$$T^2{}_{12} = T^3{}_{13} = \frac{1}{r}(1 - \gamma_{11}). \tag{69}$$

De (58), vemos que, para $a \neq 0$, $E_{(k)}{}^i = 0$. Para $a = 0$,

$$E_{(0)}{}^\theta = E_{(0)}{}^\phi = 0$$

e

$$E_{(0)}{}^r = -\frac{1}{r}(\gamma_{00} - 1). \tag{70}$$

Isso mostra que apenas a componente radial do vetor, $a = 0$ é diferente de zero, o que está de acordo com a distribuição esfericamente simétrica de massa.

A partir de (59), obtemos as componentes gravitomagnéticas.

$$\begin{aligned} B_{(0)\phi} &= B_{(0)\theta} = B_{(0)r} = 0, \\ B_{(1)r} &= B_{(2)r} = B_{(3)r} = B_{(3)\theta} = 0, \\ B_{(1)\phi} &= \frac{cos\theta cos\phi}{2r^2}(1 - \gamma_{11}{}^{-1} - \frac{GM}{r}), \\ B_{(2)\phi} &= \frac{cos\theta sin\phi}{2r^2}(1 - \gamma_{11}{}^{-1} - \frac{GM}{r}), \\ B_{(3)\phi} &= -\frac{sin\theta}{2r^2}(1 - \gamma_{11}{}^{-1} - \frac{GM}{r}), \\ B_{(1)\theta} &= \frac{sin\phi}{2r^2 sin\theta}(1 - \gamma_{11}{}^{-1} - \frac{GM}{r}), \\ B_{(2)\theta} &= -\frac{cos\phi}{2r^2 sin\theta}(1 - \gamma_{11}{}^{-1} - \frac{GM}{r}). \end{aligned} \tag{71}$$

A partir disso, vemos que

$$B^2 \equiv g_{ij} B_a{}^i B^{aj} = \frac{1}{gr^2}(1 - \gamma_{11}{}^{-1} - \frac{GM}{r})^2.$$

Ou seja, não há dependência angular, o que está de acordo com a simetria esférica da solução de Schwarzshild.

Na hipótese de campo fraco, a métrica pode ser escrita como uma perturbação da métrica de Minkowski: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + a_{\mu\nu}$. Devemos então descartar os termos de segunda ordem $(\frac{m}{r})^2 = O(\epsilon^2)$. Isso corresponde a fazer $\frac{m}{r} << 1$ e expandir em série de Taylor. Fazendo isso, temos, para a componente não nula do campo gravitoelétrico:

$$E_{(0)}{}^{r} = \frac{mG}{r^2}. \tag{72}$$

Vemos que a componente $a = 0$ de $\vec{E^a}$ é análoga ao campo elétrostático descrito pela lei de Coulomb.

Para as componentes do campo gravitomagnético, temos:

$$B_{(0)k} = B_{(i)j} = 0. \tag{73}$$

5 Conclusão

O que podemos ver a partir da explanação acima é que a gravidade teleparalela não apenas é equivalente à Relatividade Geral, como também se apresenta como uma teoria de calibre. Isso nos permitiu fazer um paralelo mais profundo entre gravidade e eletromagnetismo. De fato, essas duas interações apresentam muitas semelhanças, embora difiram em alguns aspectos.
A criação de uma teoria de calibre para a gravitação nos deixa mais próximos da quantização do campo gravitacional. Dessa forma, uma teoria unificada se torna mais palpável à medida que avançamos em uma pesquisa mais aprofundada da gravidade teleparalela.

6 Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq pelo apoio financeiro.

Referências

[1] Carroll, S. *Spacetime and Geometry: An introduction to General Relativity.* San Francisco: Addison Wesley, 2004.

[2] Schutz, B. *Geometrical Methods of Mathematical Physics.* Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

[3] Aldovandi, R.; Pereira, J.G. *Teleparallel Gravity: An Introduction.* Nova York: Springer, 2013.

[4] Spaniol, E. P. ; Andrade, V. C. . *Gravitomagnetism in teleparalellism.* International Journal of Modern Physics D, v. 19, p. 489-505, 2010.

[5] Landau, L.D.; Lifshitz, E.M. *Teoria do Campo.* São Paulo: Hemus, 2004.