

# Sobre os Estados Emaranhados

Eric M. A. Pinto\*      Sergio S. Floquet<sup>† ‡</sup>  
M. Graças R. Martins<sup>§</sup>      J. David M. Vianna<sup>¶</sup>

24 de fevereiro de 2015

## Resumo

O emaranhamento quântico está na base de muitos estudos em computação e informação quânticas. Nesta comunicação apresentamos alguns dados e conceitos relativos a este campo de pesquisa. Exemplos de estados emaranhados são apresentados e seu uso em teletransporte quântico discutido.

**Palavras-chaves:** Emaranhamento Quântico. Computação Quântica. Informação Quântica.

## 1 Computação Quântica

Ainda na década de 70 do século passado, Gordon Moore [1] publicou um artigo sobre a redução do tamanho dos componentes eletrônicos e sua relação com os computadores. Moore percebeu que o número de transistores dentro dos chips de computadores dobrava a cada ano e meio. Essa descoberta passou a ser conhecida como a Lei de Moore e embora tenha parecido inicialmente uma super-estimativa, continua sendo um ponto de referência. De acordo com essa lei, a previsão é que no ano de 2020 cada bit de informação em um computador seja representado por apenas um átomo. Para comparação, em 1950 o mesmo bit seria representado por 10 mil quadrilhões de átomos e certamente o comportamento dessa quantidade de átomos juntos admite uma descrição pelas leis clássicas, o que não ocorre com um

---

\*Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, Campus Ondina, 40210-340, Salvador, Bahia, Brasil.

†Universidade Federal do Vale do São Francisco, 64770-000, São Raimundo Nonato, Piauí, Brasil.

‡Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, Campus Ondina, 40210-340, Salvador, Bahia, Brasil.

§Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, Campus Ondina, 40210-340, Salvador, Bahia, Brasil.

¶Instituto de Física, Universidade de Brasília, 70910-900, Brasília, DF, Brasil.

único átomo que precisa do uso das leis da mecânica quântica. Em resumo, os bits representados por átomos individuais são bits quânticos, comumente chamados de q-bits, e não bits clássicos. Portanto, a partir de 2020, a Física Clássica não seria mais aplicável aos componentes de computadores que nesse caso deverão ser descritos com a Física Quântica. Com isso, a lei de Moore (vide figura 1<sup>1</sup>) termina por estabelecer uma conexão entre duas áreas que inicialmente pareciam bem distintas. A junção da Mecânica Quântica com a Teoria de Computação dá origem a um novo campo de pesquisa que é a Computação Quântica e Informação Quântica.

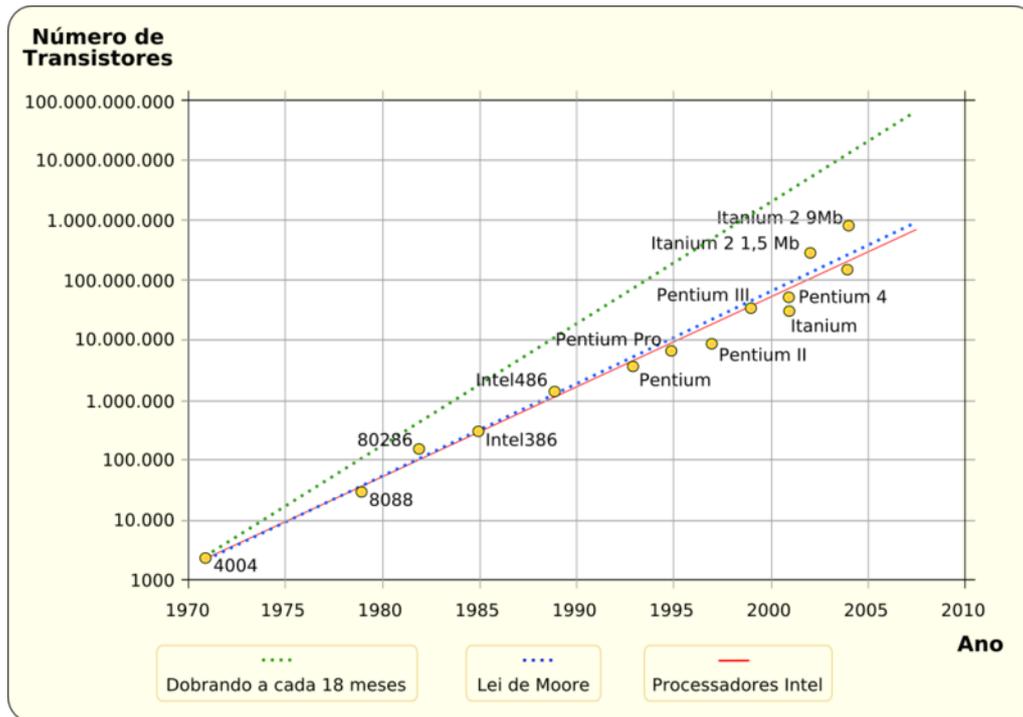


Figura 1 – Lei de Moore.

Um dos primeiros grandes resultados desse novo campo de pesquisa foi o algoritmo de Schor [2]. Esse é um algoritmo quântico capaz de realizar a fatoração de números inteiros com  $n$  bits, ou seja, números com o comprimento de  $n$  dígitos quando escrito no sistema binário, em um tempo polinomial em  $n$ , enquanto o melhor algoritmo clássico executa a mesma tarefa em um tempo exponencial em  $n$ . Esse fato confirma a observação de Feynman [3] no início da década de oitenta do século findo, numa palestra apresentada na Primeira Conferência de Computação Física no MIT, de que sistemas quânticos simples poderiam realizar grandes quantidades de cálculos em um curto espaço de tempo e que certas tarefas executadas por um computador tradicional levaria um tempo extremamente longo para simular um experimento simples de Física Quântica. Na década de 90, Lov Grover [4] mostrou outra evidência do poder dos computadores quânticos ao desenvolver um algoritmo de busca, numa lista desordenada de dados, muito mais veloz que qualquer algoritmo clássico.

<sup>1</sup> Figura retirada da referência [6].

Vários protótipos de computadores quânticos utilizando algumas dezenas de bits quânticos já foram testados com sucesso em laboratórios de todo o mundo. O grande desafio no momento é aumentar o número de bits quânticos mantendo as propriedades quânticas do sistema, de modo a ter um computador que possa realizar grandes operações.

De forma análoga aos computadores clássicos, construídos a partir de circuitos elétricos contendo fios e portas lógicas, um computador quântico é constituído de circuito quântico contendo fios e de portas lógicas quânticas [5, 6]. A unidade fundamental da teoria clássica de informação é o bit, que pode assumir dois valores lógicos excludentes: 0 ou 1. Em contraste, na Computação e Informação Quânticas são utilizados estados quânticos, de modo que a unidade fundamental deve pertencer ao espaço de Hilbert. Esse objeto é denominado *quantum bit* ou q-bit e seu estado pode ser escrito como uma sobreposição de dois estados,  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , até que uma medida seja efetuada; quando a medida é realizada, o resultado será “0” ou “1”. Por exemplo, para um q-bit no estado

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle, \quad (1)$$

quando medido, dará resultado “0” em 50% das vezes e o valor “1” em 50% das vezes. O q-bit pode ser implementado por diversos sistemas físicos, sendo exemplos a polarização de fótons, a direção de spin de um núcleo, os níveis de energia de um átomo, os níveis de energia de um elétron confinado num poço quântico, etc.

É possível obter uma visualização geométrica dos estados de um q-bit. Considere a seguinte equação:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \\ &= |\alpha|e^{i\gamma}|0\rangle + e^{i\eta}|\beta||1\rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

em que definimos  $|\alpha| = \cos(\theta/2)$  e  $|\beta| = \sin(\theta/2)$ , o que mantém a condição de normalização de  $|\psi\rangle$ ; assim,

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i(\eta-\gamma)}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle \right),$$

em que  $e^{i\gamma}$  é um fator de fase global que pode ser desconsiderado por não alterar a amplitude de probabilidade. Fazendo  $\eta - \gamma = \phi$ , encontramos que

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle. \quad (3)$$

Podemos usar os números  $\theta$  e  $\phi$  para definir um ponto sobre a superfície de uma esfera de raio unitário. Nessa esfera, conhecida como esfera de Bloch<sup>2</sup>, cada ponto da superfície representa um possível estado de um q-bit. Devemos observar que essa representação geométrica é limitada, pois não existe uma generalização simples

<sup>2</sup> Figura retirada da referência [1]

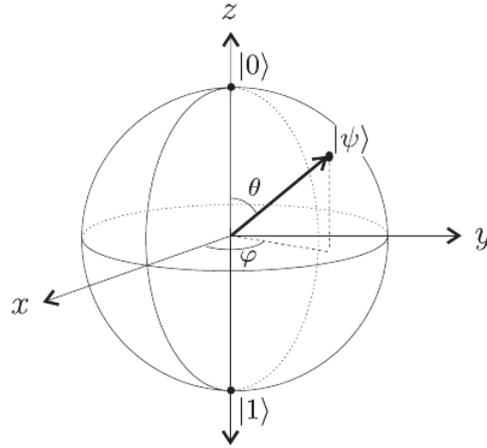


Figura 2 – Representação do q-bit  $|\psi\rangle$  na esfera de Bloch.

da esfera de Bloch para muitos q-bits [1]. Pelos postulados da Teoria Quântica, para o sistema constituído por dois q-bits, por exemplo, o estado é formado pelo produto tensorial dos dois q-bits, ou seja,

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= (\alpha_1 |0\rangle + \beta_1 |1\rangle) \otimes (\alpha_2 |0\rangle + \beta_2 |1\rangle) \\
 &= \alpha_1\alpha_2 |00\rangle + \alpha_1\beta_2 |01\rangle + \beta_1\alpha_2 |10\rangle + \beta_1\beta_2 |11\rangle \\
 &= \alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle,
 \end{aligned} \tag{4}$$

com  $|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 = 1$ .

De modo análogo são construídos os estados para 3 q-bits, 4 q-bits etc, podendo no caso de muitos q-bits surgirem os estados emaranhados. Na realidade, atualmente, o emaranhamento quântico desempenha um papel fundamental na Informação e Computação Quânticas. A descoberta do emaranhamento quântico tem suas origens no artigo seminal de Einstein, Podolsky e Rosen [7] em que foi proposto um experimento mental para mostrar que a Teoria Quântica era incompleta. Atualmente, antes de considerar o emaranhamento como um mistério, como ocorreu nos anos trinta do século vinte, esse fenômeno é visto como um fato que pode ser usado na realização de certas tarefas de forma mais rápida e mais segura. Neste sentido, o emaranhamento tem sido amplamente explorado no estudo do teletransporte quântico<sup>3</sup>, na elaboração de algoritmos quânticos e em criptografia quântica [1].

## 2 Emaranhamento Quântico

Nas últimas décadas o significado da palavra emaranhamento tem mudado podendo-se citar, entre os físicos no domínio de fundamentos da Teoria Quântica e entre os estudiosos da teoria de Informação Quântica, expressões como:

- (i) “Uma função de onda emaranhada não descreve a realidade física de um modo completo” - Einstein, Podolsky e Rosen [7];

<sup>3</sup> Alguns autores usam a denominação teleporte quântico.

- (ii) “Para um estado emaranhado o melhor conhecimento possível do todo não inclui o melhor conhecimento possível das partes” – Schrödinger [8];
- (iii) “...uma correlação que é mais forte do que qualquer correlação clássica” – Bell [9];
- (iv) “...uma correlação que contradiz a teoria de elementos da realidade” – Mermin [9];
- (v) “...um truque que os mágicos quânticos usam para produzir fenômenos que não podem ser realizados por mágicos clássicos” – Peres [9];
- (vi) “...um recurso que possibilita o teletransporte quântico” – Bennett [9];
- (vii) “...uma estrutura global da função de onda que possibilita algoritmos mais rápidos” – Schor [9];
- (viii) “...um instrumento para comunicação segura” – Eckert [9].

Na realidade, pode-se dizer de forma resumida que o emaranhamento quântico descreve pares de sistemas correlacionados. Matematicamente, um dos critérios para caracterizar o estado puro emaranhado de um sistema físico é o fato que ele não pode ser escrito como o produto tensorial de estados que caracterizariam cada subsistema que o compõe; de um modo geral, um estado  $|\psi\rangle$  é dito ser emaranhado, se e somente se não existem estados  $|\psi_1\rangle$  e  $|\psi_2\rangle$  tais que  $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ .

Para entender como são as correlações que se apresentam no emaranhamento, consideremos um exemplo citado na literatura [10]: a polarização de fótons gêmeos. Considerando um sistema de dois fótons que se propagam na mesma direção  $z$  em sentidos opostos, na representação em que o vetor de estado de polarização na direção  $\theta$  é  $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ , tem-se a base formada pelos seguintes vetores de estado:

$$|0\rangle \equiv |\rightarrow\rangle = |\theta = 0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$|1\rangle \equiv |\uparrow\rangle = \left| \theta = \frac{\pi}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

que representam fótons linearmente polarizados nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente. Como nossa intenção é descrever um sistema de dois fótons, usaremos vetores coluna de quatro componentes, pois teremos de representar amplitudes de probabilidade para que, com analisadores orientados nas direções  $x$  e  $y$ , cada um dos dois fótons possa ser encontrado com cada uma dessas polarizações (quatro possibilidades).

Utilizando o produto tensorial dos vetores da base (5) e (6), teremos:

$$|0\rangle_1 |0\rangle_2 = |00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

em que os subscritos 1 e 2 significam, respectivamente, fóton 1 e fóton 2. A equação (7) descreve a situação do fóton 1 linearmente polarizado na direção  $x$ , e o fóton 2 também. Da mesma forma, obtivemos as demais situações. Assim,

$$|0\rangle_1 |1\rangle_2 = |01\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$|1\rangle_1 |0\rangle_2 = |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$|1\rangle_1 |1\rangle_2 = |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

O vetor de estado geral de polarização para dois fótons é:

$$|\psi\rangle = \alpha_{00} |0\rangle_1 |0\rangle_2 + \alpha_{01} |0\rangle_1 |1\rangle_2 + \alpha_{10} |1\rangle_1 |0\rangle_2 + \alpha_{11} |1\rangle_1 |1\rangle_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{00} \\ \alpha_{01} \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

em que, por exemplo,  $\alpha_{01}$  é a amplitude de probabilidade de achar o fóton 1 linearmente polarizado na direção  $x$  e o fóton 2 na direção  $y$ .

Consideremos o seguinte estado normalizado:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0\rangle_1 |0\rangle_2 + |1\rangle_1 |1\rangle_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Esse estado (12) é chamado de emaranhado pois não pode ser decomposto num produto de um estado do fóton 1 por um estado do fóton 2. Caso o estado não esteja emaranhado, ele é dito ser separável. A interpretação física da equação (11) mostra que esse é um estado em que há probabilidade  $1/2$  de achar ambos os fótons polarizados na direção  $x$  e achar ambos polarizados na direção  $y$ , ou seja, as polarizações dos dois fótons estão correlacionadas — ambas têm a mesma direção ( $x$  ou  $y$ ). Assim, se ao utilizar um analisador for verificado que o fóton 1 tem polarização  $y$ , com certeza o fóton 2 terá a mesma polarização. Em consequência, considerando dois fótons descritos pela equação (12) e com dois analisadores de

polarização distantes um do outro, se uma medida do fóton 1 indicar polarização na direção  $x$ , sem uma ação sobre o sistema pode-se afirmar que o fóton 2 também está polarizado na direção  $x$ ; mostra-se, por outro lado, que o mesmo é verdadeiro para qualquer outra direção  $x'$  que forme um ângulo  $\phi$  com  $x$ , ou seja, o fóton 2 teria também uma polarização bem definida nesta direção  $x'$ ; porém, polarizações em direções diferentes são observáveis incompatíveis, ou seja, há uma contradição com os postulados da teoria. Essa manifestação não-local foi denominada por Einstein, Podolsky e Rosen, de “ação fantasmagórica à distância”, concluindo eles que a teoria quântica na sua formulação usual seria incompleta.

Uma questão importante é: dado um estado quântico qualquer, como saber se ele é um estado emaranhado. Estudos com esse objetivo têm levado a alguns critérios para estados puros e misturas, a exemplo da decomposição de Schmidt [11], do critério de Peres-Horodecki [12, 13], do critério de Simon [14] e propostas algébricas [15].

Os estados emaranhados mais conhecidos na literatura são os estados de Bell. São estados de 2 q-bits, maximamente emaranhados e que podem ser encontrados a partir de circuitos quânticos; não trataremos desses circuitos nesta comunicação mas, para conhecimento e aplicação posterior, os estados de Bell são:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle); \quad (13)$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle); \quad (14)$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle); \quad (15)$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle). \quad (16)$$

Esses estados são também conhecidos como base de Bell [16] e pares EPR (Einstein, Podolsky e Rosen) em homenagem aos físicos que primeiro analisaram as propriedades do emaranhamento. Deve-se observar que os estados de Bell formam uma base no espaço de Hilbert, e portanto podem ser distinguidos realizando-se uma medida apropriada.

### 3 Uma Aplicação do Emaranhamento

Ao estar familiarizado com o conceito de emaranhamento, pode-se aplicá-lo para compreender um importante fenômeno que só acontece no âmbito da Teoria Quântica: o teletransporte quântico. No que segue os q-bits podem ser tratados como objetos matemáticos abstratos ou relacionados com o sistema específico usado na seção anterior.

### 3.1 Teletransporte Quântico

O teletransporte consiste em deslocar a informação contida no estado quântico de um q-bit de um lugar para outro, independente da distância entre o emissor e o receptor [17–19]. Para isso, basta que haja compartilhamento por dois observadores de um dos estados de Bell descritos pelas equações (13,14,15,16).

Considerando os personagens citados em vários textos, imagine que Alice e Bob tenham se encontrado há um tempo e nesse encontro compartilharam um dos estados de Bell. Após algum tempo, vivendo longe um do outro, Alice pretende teletransportar a informação contida em um q-bit seu para outro q-bit que se encontra com Bob. Resumidamente, Alice deseja enviar para Bob um q-bit  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$  em que  $a$  e  $b$  são amplitudes desconhecidas. Devido ao compartilhamento de um estado de Bell, Alice e Bob compartilham um par de q-bits em um estado emaranhado, tendo Alice 2 q-bits: um que está emaranhado com o q-bit de Bob e outro que contém a informação que ela deseja teletransportar.

Digamos que Alice e Bob compartilharam o estado de Bell descrito pela equação (13), então o sistema todo (q-bit a teletransportar e o estado de Bell) é descrito por

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |\psi\rangle \otimes |\Phi^+\rangle \\ &= (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a|000\rangle + a|011\rangle + b|100\rangle + |111\rangle) \end{aligned} \quad (17)$$

com os dois primeiros q-bits pertencentes a Alice e o último a Bob. Podemos reescrever a equação (17) evidenciando o q-bit de Bob, ou seja,

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \frac{1}{2}(|\Phi^+\rangle(a|0\rangle + b|1\rangle) + |\Phi^-\rangle(a|0\rangle - b|1\rangle) \\ &\quad + |\Psi^+\rangle(b|0\rangle + a|1\rangle) + |\Psi^-\rangle(-b|0\rangle + a|1\rangle)). \end{aligned} \quad (18)$$

Na primeira parcela dessa equação, os q-bits de Alice estão no estado  $|\Phi^+\rangle$  e o de Bob em  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$  que é o estado original  $|\psi\rangle$ ; assim, se Alice realizar uma medida e encontrar o resultado  $|\Phi^+\rangle$ , o q-bit de Bob estará em  $|\psi\rangle$ . Um resultado intrigante já que indica que a informação quântica (estado quântico do q-bit) não precisa atravessar o espaço entre os q-bits para ser levada de um para o outro: a informação desaparece de um q-bit (o q-bit de Alice) e reaparece no outro (o q-bit de Bob).

Da relação (18) temos que, condicionados às operações de medida de Alice, os possíveis resultados para o q-bit de Bob, são:

$$|\Phi^+\rangle \longrightarrow a|0\rangle + b|1\rangle; \quad (19)$$

$$|\Phi^-\rangle \longrightarrow a|0\rangle - b|1\rangle; \quad (20)$$

$$|\Psi^+\rangle \longrightarrow b|0\rangle + a|1\rangle; \quad (21)$$

$$|\Psi^-\rangle \longrightarrow -b|0\rangle + a|1\rangle. \quad (22)$$

Em consequência, para saber em qual estado encontra-se seu q-bit, Bob precisa conhecer o resultado da medida de Alice. Na realidade o processo de teletransporte é finalizado quando Bob recebe a informação de qual das quatro operações de medida Alice realizou. O processo tem assim duas etapas: uma quântica, na qual Alice realiza as operações necessárias para que a informação de seu q-bit possa passar para o q-bit de Bob e uma etapa clássica em que Alice, usando um meio de comunicação (telefone, por exemplo), informa a Bob o resultado obtido com as operações realizadas. Deve-se observar que se a medida resultar diferente de  $|\Phi^+\rangle$  Bob deve corrigir o estado de seu q-bit aplicando uma porta lógica conveniente.

Vale a pena ressaltar que apesar do teletransporte quântico ser uma forma de transmissão de informação instantânea, para finalizar o processo é necessário que Alice informe qual operação fez sobre os estados em sua posse. Esse processo em que Alice precisa informar a operação que fez, é o que faz com que a velocidade de transmissão não ultrapasse a velocidade da luz, isto é, não viole o princípio da relatividade.

## 4 Conclusão

Nesta comunicação abordamos os alicerces da Teoria da Informação e Computação Quânticas. Partindo da Lei de Moore, formulada na década de 70, desenvolvemos os conceitos de q-bit e de emaranhamento, trazendo como exemplo os famosos estados de Bell. Aplicamos esses estados para a realização do teletransporte quântico de um 1 q-bit, exemplificando como a informação de um estado quântico pode ser transferida para outro instantaneamente. Essa é uma das diversas aplicações numa área cheia de surpresas e descobertas, onde tarefas aparentemente impossíveis podem ocorrer.

## Referências

- [1] Nielsen, M. A.; Chuang, I. B. *Quantum Computation and Quantum Information*. United Kingdom: Cambridge University Press, (2001).
- [2] Schor, P. W.: *Symposium on Fundamentals of Computer Science (FOCS)* 56 (1994).
- [3] Feynman, R. P.: *Int. J. Theor. Phys.* **21**, 467 (1982).
- [4] Grover, L. K.: *Phys. Rev. Lett.* **79**, 325 (1997).

- [5] Pinto, E. M. A.: *Álgebras de Hopf em Computação Quântica*. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, Salvador, (2015).
- [6] Sales, S. F.: *Informação Quântica: Efeitos da Temperatura Utilizando a Dinâmica de Campos Térmicos*. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, Salvador, (2011).
- [7] Einstein, A.; Podolsky, B.; Rosen, N.: Phys. Rev. **47**, 10 777 (1935).
- [8] Schrödinger, E.: Naturwissenschaften **23** 807 (1935).
- [9] Bruss, D.: J. Math. Phys. **43** 4237 (2002).
- [10] Nussenzveig, H. M.: *Curso de Física Básica 4*. 1.ed. São Paulo: Editora Blucher, (1998).
- [11] Ekert, A., Knight, P. L.: Am. J. Phys. **63** 415 (1995).
- [12] Peres, A.: Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996).
- [13] Horodecki, M., Horodecki, P., Horodecki, R.: Phys. Lett. A **223**, 1 (1996).
- [14] Simon, R.: Phys. Rev. Lett. **84**, 2726 (2000).
- [15] Vianna, J. D. M.; Trindade, M. A. S.; Fernandes, M. C. B.: Int. J. Theor. Phys. **47**, 961 (2008).
- [16] Bell, J. S.: Physics **1**, 195 (1964).
- [17] Bouwmeester, D.; Pan, J-W.; Mattle, K.; Eibl, M.; Weinfurter, H.; Zeilinger, A.: Nature **390**, 575 (1997).
- [18] Riebe, M.; Häffner, H.; Roos, C. F.; Hänsel, W.; Benhelm, J.; Lancaster, G. P. T.; Körber, T. W.; Becher, C.; Schmidt-Kaler, F.; James, D. F. V.; Blatt, R.: Nature **429**, 734 (2004).
- [19] Barrett, M. D.; Chiaverini, J.; Schaetz, T.; Britton, J.; Itano, W. M.; Jost, J. D.; Knill, E.; Langer, C.; Leibfried, D.; Ozerl, R.; Wineland, D. J.: Nature **429**, 737 (2004).