

Força de uma casca esférica em um corpo acelerado: independência da posição

LUCAS M. COSTA* FÁBIO M. S. LIMA†

Instituto de Física, Universidade de Brasília

19 de março de 2018

Resumo

Em um trabalho anterior [Physicae Organum 2 (2), 1 (2016)], foi mostrado que uma força gravitacional do tipo Weber, a qual, além do termo newtoniano, inclui termos que contemplam o movimento relativo entre os corpos que interagem, é não-nula quando um corpúsculo em repouso no centro de uma casca esférica homogênea é acelerado em relação a ela. Nesta nota, mostramos matematicamente que a mesma força é obtida qualquer que seja a posição do corpúsculo no interior da casca.

Palavras-chave: Força gravitacional, Teorema das cascas, Princípio de Mach, Mecânica Relacional.

I. INTRODUÇÃO

Considere um corpúsculo de massa m localizado no interior de uma casca esférica de massa M , distribuída uniformemente. Devido à simetria da casca esférica, qualquer força que só dependa da distância r entre os corpos interagentes fornecerá uma resultante nula quando o corpo estiver *no centro* da casca. Na Proposição 70 do Livro I do *Principia* (1687) [1], Newton provou um teorema essencial para a sua nova mecânica e cosmologia, qual seja o teorema XXX, que estabelece que uma força inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os corpos interagentes fornecerá uma resultante *nula* para um corpúsculo no interior de uma casca esférica homogênea, **qualquer que seja a posição do corpúsculo**. Como a lei universal de gravitação de Newton assume que a interação gravitacional só depende do produto das massas e do inverso do quadrado da distância entre elas [2], então a força gravitacional exercida pela casca deve permanecer nula mesmo que o corpo esteja em movimento em relação à casca. Esta nulidade foi crucial para que Newton pudesse desprezar a influência gravitacional das estrelas distantes sobre o movimento dos corpos nas proximidades da Terra e no sistema solar, já que elas estão distribuídas uniformemente por toda a esfera celeste, como apontado no Corolário 2 da Proposição 14, no Livro III

*Graduando da ENE-UnB, bolsista PIBIC.

†Prof. Adjunto do IF-UnB. Corresponding author: fabio@fis.unb.br

do *Principia* [2]. Esse mesmo resultado nulo também é previsto (com a casca esférica em repouso) pela Teoria da Relatividade Geral (TRG), proposta por Einstein (1879-1955) em 1915 [3, 4].¹

Tendo em vista que a TRG não contempla o princípio de Mach, o qual afirma que a inércia de um corpo é determinada pela distribuição das massas de todo o resto do Universo, Assis propôs na Ref. [7] a *Mecânica Relacional* como uma teoria alternativa às teorias de gravitação de Newton e de Einstein, com a vantagem de sempre contemplar o princípio de Mach. Nessa nova mecânica, postula-se uma versão gravitacional da força eletrodinâmica de Weber, com termos que dependem da velocidade e da aceleração relativas entre os corpos [8]. Na Ref. [9], diversos casos de movimento relativo entre uma casca esférica e um corpo são discutidos, mostrando-se que, *em geral, o movimento relativo acelerado faz com que a casca exerça uma força não-nula sobre o corpo*. No Apêndice A.1 da Ref. [9], aquele autor afirma que a casca exercerá uma força não-nula sobre um corpo em seu interior quando este acelerar em relação à casca, mas não é fornecida uma demonstração. Isto motivou um dos autores (FMSL) e colaboradores a calcularem a integral de superfície da força gravitacional no caso mais simples de um corpúsculo *inicialmente parado no centro de uma casca esférica* [10], o que forneceu uma resultante não-nula e oposta à aceleração do corpo. Aqui nesta nota, desenvolvemos o cálculo correspondente ao caso mais geral, em que o corpo acelerado ocupa **qualquer posição no interior da casca esférica**.

II. FORÇA EXERCIDA PELA CASCA

A força gravitacional exercida por um corpo de massa m_1 sobre um corpo de massa m_2 postulada pela Mecânica Relacional é dada por [7, 9]:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2} \left[1 - \frac{\xi}{c^2} \left(\frac{\dot{r}_{12}^2}{2} - r_{12}\ddot{r}_{12} \right) \right] \hat{r}_{21}, \quad (1)$$

onde $\hat{r}_{21} \equiv \vec{r}_{21}/r_{21} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$, G é a constante universal de gravitação e c é a velocidade da luz no vácuo. Note que esta força depende da velocidade relativa $\dot{r}_{12} \equiv dr_{12}/dt = \vec{v}_{12} \cdot \hat{r}_{12} = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot \hat{r}_{12}$ e da aceleração relativa $\ddot{r}_{12} \equiv d\dot{r}_{12}/dt = [\vec{v}_{12} \cdot \vec{v}_{12} - (\vec{v}_{12} \cdot \hat{r}_{12})^2 + \vec{a}_{12} \cdot \vec{r}_{12}] / r_{12}$, conforme Eqs. (2.10) e (2.11) da Ref. [8], respectivamente. A situação física em que estamos interessados é aquela em que um corpúsculo com massa m encontra-se inicialmente parado em um ponto qualquer dentro de uma casca esférica de raio R , cuja massa M está uniformemente distribuída, com uma densidade superficial $\sigma = M/(4\pi R^2)$. No instante $t = 0$, o corpo passa a acelerar uniformemente na direção arbitrária \hat{a} , que forma um ângulo α com o vetor-posição \vec{C} , como ilustrado na Fig. 1.² Neste caso, assumindo $\xi = 6$ (este é o valor que leva à precessão observada para o periélio de Mercúrio, como mostrado na Seç. 23.1 da Ref. [9]), a força exercida pelo elemento de massa dM (corpo 1) sobre o corpúsculo (corpo 2) fica:

$$d^2\vec{F} = -\frac{Gm dM}{r^2} \left(1 - 3\frac{\dot{r}^2}{c^2} + 6\frac{r\ddot{r}}{c^2} \right) \hat{r}, \quad (2)$$

¹Este resultado nulo da TRG pode ser obtido tomando-se $\omega = 0$ na expressão obtida em 1918 por Thirring para a força gravitacional exercida por uma casca esférica girante sobre um corpo movendo-se em seu interior [5, 6].

²Estamos assumindo que essa aceleração está sendo provocada por alguma força externa à casca, oriunda de outros corpos.

onde, por simplicidade, fizemos $\hat{r} \equiv \hat{r}_{21} = \vec{r}/r$, como indicado na Fig. 1. Aqui, $dM = \sigma dS$ é o elemento de massa da casca, onde $dS = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ é o elemento de área em coordenadas esféricas, localizado em $\vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, já que estamos tomando a origem O do sistema de coordenadas no centro da casca. Sem perda de generalidade, escolheremos o eixo z apontando na direção da posição inicial do corpúsculo, identificada por $\vec{C} = C\hat{k}$ na Fig. 1, a seguir.

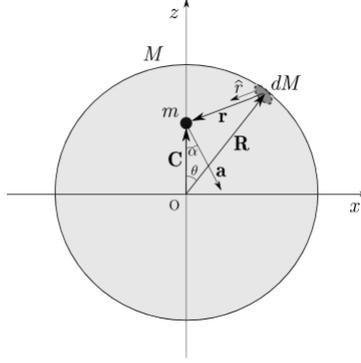


Figura 1: Casca esférica de raio R e massa M , em repouso, interagindo com um corpúsculo de massa m , inicialmente parado em um ponto qualquer dentro da casca, indicado pelo vetor \vec{C} . No instante $t = 0$, o corpo é acelerado ao longo da direção arbitrária \hat{a} , a qual forma um ângulo α com o eixo z . Os vetores \vec{C} , \vec{R} e \vec{r} são coplanares, pois $\vec{r} = \vec{C} - \vec{R}$, porém \hat{a} , em geral, não está no mesmo plano desses vetores.

Para determinar a força total \vec{F} exercida pela casca sobre o corpo temos que calcular a integral de superfície de $d^2\vec{F}$ sobre toda a casca esférica. Entretanto, o primeiro termo (o newtoniano) fornecerá uma integral nula, de acordo com o teorema XXX do *Principia* [1]. Além disso, estamos considerando que o corpo encontra-se inicialmente parado em relação à casca, de forma que o termo que contém a velocidade relativa $\dot{r} = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \hat{r}$ é nulo em $t = 0$. Então, restará somente o termo com \ddot{r} :

$$\vec{F} = -\frac{6Gm\sigma R^2}{c^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\ddot{r}}{r} \hat{r} \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (3)$$

A aceleração relativa \ddot{r} é facilmente determinada assumindo-se que a casca permanece em repouso, de modo que $\vec{a}_1 = \vec{0}$, enquanto o corpúsculo é acelerado em relação a ela, ou seja $\vec{a}_2 = \vec{a} = a\hat{a}$, onde $a > 0$ é o módulo da aceleração do corpúsculo no instante $t = 0$. Dessa forma, $\ddot{r} = \vec{a} \cdot \hat{r}$, o que nos leva a

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\frac{6Gm\sigma R^2}{c^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\vec{a} \cdot \hat{r}}{r} \hat{r} \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= -\frac{6Gm\sigma R^2}{c^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3} \vec{r} \sin\theta d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

Como o vetor posição-relativa é $\vec{r} = \vec{C} - \vec{R}$, essa integral pode ser expandida na forma:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\frac{6Gm\sigma R^2}{c^2} \left(\vec{C} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3} \sin\theta d\theta d\varphi - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3} \vec{R} \sin\theta d\theta d\varphi \right) \\ &= -\frac{6Gm\sigma R^2}{c^2} \left[\vec{a} \cdot \left(\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\vec{C} - \vec{R}}{r^3} \sin\theta d\theta d\varphi \right) \vec{C} - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\vec{a} \cdot (\vec{C} - \vec{R})}{r^3} \vec{R} \sin\theta d\theta d\varphi \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

A primeira integral, acima, pode ser resolvida expandindo-a da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \vec{C} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{r^3} d\theta d\varphi - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{r^3} \vec{R} d\theta d\varphi &= I_1 \vec{C} - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{r^3} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) d\theta d\varphi \\ &= I_1 \vec{C} - \hat{i} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi x \frac{\sin \theta}{r^3} d\theta d\varphi - \hat{j} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi y \frac{\sin \theta}{r^3} d\theta d\varphi - \hat{k} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi z \frac{\sin \theta}{r^3} d\theta d\varphi, \end{aligned} \quad (6)$$

onde

$$I_1 \equiv \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{r^3} d\varphi d\theta = 2\pi \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{r^3} d\theta, \quad (7)$$

já que $r = \sqrt{R^2 + C^2 - 2RC \cos \theta}$ (obtida com a lei dos cossenos) não depende de φ . A substituição simples $u^2 = R^2 + C^2 - 2RC \cos \theta$, com $u du = RC \sin \theta d\theta$, resulta em

$$I_1 = \frac{2\pi}{RC} \int_{R-C}^{R+C} \frac{1}{u^2} du = \frac{4\pi}{R(R^2 - C^2)}. \quad (8)$$

As três últimas integrais da Eq. (6) também podem ser resolvidas analiticamente substituindo-se $x = R \cos \varphi \sin \theta$, $y = R \sin \varphi \sin \theta$ e $z = R \cos \theta$, que são as expressões usuais em coordenadas esféricas. Com isso, obtemos:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi x \frac{\sin \theta}{r^3} d\theta d\varphi = R \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{r^3} d\theta \quad (9)$$

e

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi y \frac{\sin \theta}{r^3} d\theta d\varphi = R \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{r^3} d\theta, \quad (10)$$

que são *ambas nulas*, pois $\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0$, e

$$\begin{aligned} I_2 &\equiv \int_0^\pi \int_0^{2\pi} z \frac{\sin \theta}{r^3} d\varphi d\theta \\ &= 2\pi R \int_0^\pi \cos \theta \frac{\sin \theta}{r^3} d\theta. \end{aligned} \quad (11)$$

Fazendo a mesma substituição simples que utilizamos para resolver I_1 , nas Eqs. (7) e (8), obtemos:

$$\begin{aligned} I_2 &= 2\pi R \int_{R-C}^{R+C} \frac{\frac{u^2 - R^2 - C^2}{(-2RC)} \frac{u du}{RC}}{u^3} \\ &= -\frac{2\pi R}{2R^2 C^2} \int_{R-C}^{R+C} \frac{u^2 - (R^2 + C^2)}{u^2} du \\ &= -\frac{\pi}{RC^2} \int_{R-C}^{R+C} \left[1 - (R^2 + C^2) \frac{1}{u^2} \right] du \\ &= \frac{4\pi C}{R(R^2 - C^2)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Com os resultados obtidos acima para as integrais I_1 e I_2 , a primeira integral da Eq. (5), correspondente ao vetor \vec{C} , reduz-se a

$$\begin{aligned} I_1 \vec{C} - I_2 \hat{k} &= (I_1 C - I_2) \hat{k} \\ &= \left[\frac{4\pi}{R(R^2 - C^2)} C - \frac{4\pi C}{R(R^2 - C^2)} \right] \hat{k} \\ &= 0 \hat{k}. \end{aligned} \quad (13)$$

Com isso, a força exercida pela casca reduz-se a

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{6Gm\sigma R^2}{c^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\vec{a} \cdot (\vec{C} - \vec{R})}{r^3} \vec{R} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= \frac{6Gm\sigma R^2}{c^2} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\vec{a} \cdot \vec{C}}{r^3} \vec{R} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\vec{a} \cdot \vec{R}}{r^3} \vec{R} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Na primeira integral acima, note que $\vec{a} \cdot \vec{C} = -aC \cos\alpha$, portanto:

$$\begin{aligned} I_3 &\equiv \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\vec{a} \cdot \vec{C}}{r^3} \vec{R} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= -aC \cos\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\theta}{r^3} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \, d\theta \, d\varphi. \end{aligned} \quad (15)$$

Ao expandirmos esta integral em uma soma de integrais (uma para cada coordenada), as integrais com x e y se anularão pelo mesmo motivo apontado nas Eqs. (9) e (10), restando somente

$$\begin{aligned} I_3 &= -aC \cos\alpha \hat{k} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} z \frac{\sin\theta}{r^3} \, d\varphi \, d\theta \\ &= -aC \cos\alpha I_2 \hat{k} \\ &= -aC \cos\alpha \frac{4\pi C}{R(R^2 - C^2)} \hat{k} \\ &= -\frac{4\pi a C^2 \cos\alpha}{R(R^2 - C^2)} \hat{k}. \end{aligned} \quad (16)$$

Por fim, a segunda integral da Eq. (14) pode ser resolvida expandindo-a da seguinte forma:

$$\begin{aligned} I_4 &\equiv \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\vec{a} \cdot \vec{R}}{r^3} \vec{R} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \vec{a} \cdot \vec{R} \frac{\sin\theta}{r^3} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \, d\varphi \, d\theta. \end{aligned} \quad (17)$$

Escrevendo a aceleração na forma $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (a_x x + a_y y + a_z z) \frac{\sin \theta}{r^3} \vec{R} \, d\varphi \, d\theta \\
 &= a_x \int_0^\pi \int_0^{2\pi} x \frac{\sin \theta}{r^3} (x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}) \, d\varphi \, d\theta \\
 &\quad + a_y \int_0^\pi \int_0^{2\pi} y \frac{\sin \theta}{r^3} (x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}) \, d\varphi \, d\theta \\
 &\quad + a_z \int_0^\pi \int_0^{2\pi} z \frac{\sin \theta}{r^3} (x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}) \, d\varphi \, d\theta \\
 &= a_x \hat{i} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} x^2 \frac{\sin \theta}{r^3} \, d\varphi \, d\theta \\
 &\quad + a_y \hat{j} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} y^2 \frac{\sin \theta}{r^3} \, d\varphi \, d\theta \\
 &\quad + a_z \hat{k} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} z^2 \frac{\sin \theta}{r^3} \, d\varphi \, d\theta. \tag{18}
 \end{aligned}$$

A última igualdade ocorre porque as integrais duplas com termos cruzados — i.e., xy , yz e xz — são todas *nulas*, pois esses produtos levam às integrais azimutais $\int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi = 0$, $\int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d\varphi = 0$ e $\int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2\varphi) \, d\varphi = 0$. Em coordenadas esféricas, as integrais com os termos x^2 , y^2 e z^2 do final da Eq. (18) ficam:

$$\begin{aligned}
 I_4 &= R^2 \left[a_x \hat{i} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \frac{\sin^3 \theta}{r^3} \, d\varphi \, d\theta + a_y \hat{j} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \frac{\sin^3 \theta}{r^3} \, d\varphi \, d\theta + 2\pi a_z \hat{k} \int_0^\pi \cos^2 \theta \frac{\sin \theta}{r^3} \, d\theta \right] \\
 &= \pi R^2 a_x \hat{i} \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta}{r^3} \, d\theta + \pi R^2 a_y \hat{j} \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta}{r^3} \, d\theta + 2\pi R^2 a_z \hat{k} \int_0^\pi \cos^2 \theta \frac{\sin \theta}{r^3} \, d\theta \\
 &= \pi R^2 (a_x \hat{i} + a_y \hat{j}) \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta}{r^3} \, d\theta + 2\pi R^2 a_z \hat{k} \int_0^\pi \cos^2 \theta \frac{\sin \theta}{r^3} \, d\theta \\
 &= \pi R^2 (a_x \hat{i} + a_y \hat{j}) I_5 + 2\pi R^2 a_z \hat{k} I_6, \tag{19}
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 I_5 &\equiv \int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta}{r^3} \, d\theta = \int_0^\pi \frac{1 - \cos^2 \theta}{r^3} \sin \theta \, d\theta \\
 &= \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{r^3} \, d\theta - \int_0^\pi \cos^2 \theta \frac{\sin \theta}{r^3} \, d\theta \\
 &= \frac{I_1}{2\pi} - \int_0^\pi \cos^2 \theta \frac{\sin \theta}{r^3} \, d\theta \\
 &= \frac{2}{R(R^2 - C^2)} - I_6 \tag{20}
 \end{aligned}$$

e

$$I_6 \equiv \int_0^\pi \cos^2 \theta \frac{\sin \theta}{r^3} \, d\theta. \tag{21}$$

Esta última integral pode ser resolvida usando-se a mesma substituição simples anterior:

$$\begin{aligned}
 I_6 &= \int_{R-C}^{R+C} \left(\frac{R^2 + C^2 - u^2}{2RC} \right)^2 \frac{1}{u^3} \frac{u}{RC} du \\
 &= \frac{1}{4R^3 C^3} \int_{R-C}^{R+C} \frac{(R^2 + C^2 - u^2)^2}{u^2} du \\
 &= \frac{1}{4R^3 C^3} \left[(R^2 + C^2)^2 \int_{R-C}^{R+C} \frac{1}{u^2} du \right. \\
 &\quad \left. + \int_{R-C}^{R+C} u^2 du - 2(R^2 + C^2) \int_{R-C}^{R+C} du \right] \\
 &= \frac{1}{2R^3 C^2} \left[\frac{(R^2 + C^2)^2}{R^2 - C^2} - R^2 - \frac{5}{3} C^2 \right] \\
 &= \frac{2(R^2 + 2C^2)}{3R^3(R^2 - C^2)}. \tag{22}
 \end{aligned}$$

De posse desses resultados exatos para I_5 e I_6 , finalizamos o cálculo da força exercida pela casca fazendo as devidas substituições na Eq. (14):

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= \frac{6Gm\sigma R^2}{c^2} (I_3 - I_4) \\
 &= -\frac{6Gm\sigma R^2}{c^2} \left[\frac{4\pi a C^2 \cos \alpha}{R(R^2 - C^2)} \hat{k} + I_4 \right] \\
 &= -\frac{6Gm\sigma R^2}{c^2} \left[\frac{4\pi a C^2 \cos \alpha}{R(R^2 - C^2)} \hat{k} \right. \\
 &\quad \left. + \pi R^2 (a_x \hat{i} + a_y \hat{j}) I_5 + 2\pi R^2 a_z \hat{k} I_6 \right] \\
 &= -\frac{6Gm\sigma R^2}{c^2} \left[\frac{4\pi a C^2 \cos \alpha}{R(R^2 - C^2)} \hat{k} \right. \\
 &\quad \left. + \pi R^2 (a_x \hat{i} + a_y \hat{j}) \left(\frac{2}{R(R^2 - C^2)} - I_6 \right) \right. \\
 &\quad \left. + 2\pi R^2 a_z \hat{k} I_6 \right]. \tag{23}
 \end{aligned}$$

Com a expressão de I_6 da Eq. (22), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= -\frac{6Gm\sigma R^2}{c^2} \left[\frac{4\pi a C^2 \cos \alpha}{R(R^2 - C^2)} \hat{k} \right. \\
 &+ 2\pi (a_x \hat{i} + a_y \hat{j}) \left(\frac{R}{R^2 - C^2} - \frac{R^2 + 2C^2}{3R(R^2 - C^2)} \right) \\
 &\quad \left. + \frac{4\pi}{3} a_z \hat{k} \frac{R^2 + 2C^2}{R(R^2 - C^2)} \right] \\
 &= -\frac{12\pi Gm\sigma R}{c^2 (R^2 - C^2)} \left[2aC^2 \cos \alpha \hat{k} \right. \\
 &+ (a_x \hat{i} + a_y \hat{j}) \left(R^2 - \frac{R^2 + 2C^2}{3} \right) \\
 &\quad \left. + \frac{2}{3} a_z \hat{k} (R^2 + 2C^2) \right]. \tag{24}
 \end{aligned}$$

Esta expressão pode ser simplificada fazendo-se:

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= -\frac{8\pi Gm\sigma R}{c^2 (R^2 - C^2)} \left[3aC^2 \cos \alpha \hat{k} \right. \\
 &+ (a_x \hat{i} + a_y \hat{j}) (R^2 - C^2) + a_z \hat{k} (R^2 + 2C^2) \left. \right] \\
 &= -\frac{8\pi Gm\sigma R}{c^2} \left[a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + \left(\frac{3C^2 a \cos \alpha}{R^2 - C^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{a_z (R^2 + 2C^2)}{R^2 - C^2} \right) \hat{k} \right]. \tag{25}
 \end{aligned}$$

Como $\vec{a} \cdot \vec{C} = -aC \cos \alpha = a_z C$, então $a \cos \alpha = -a_z$. Com isso, a expressão acima reduz-se a:

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= -\frac{8\pi Gm\sigma R}{c^2} (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \\
 &= -\frac{8\pi G\sigma R}{c^2} m \vec{a} \\
 &= -\gamma m \vec{a}. \tag{26}
 \end{aligned}$$

onde $\gamma \equiv 2GM/(Rc^2)$ é uma constante positiva, de modo que a força exercida pela casca sempre aponta na direção oposta à aceleração \vec{a} do corpúsculo em relação à casca. Este é exatamente o mesmo resultado obtido na Ref. [10] para o caso específico em que o corpúsculo ocupa o centro da casca. Este resultado é a base de toda a Mecânica Relacional, sendo essencial para a implementação do princípio de Mach [7, 9].

III. CONCLUSÃO

Nesta nota, mostramos matematicamente que a Mecânica Relacional prevê uma força gravitacional *não-nula* para a interação de uma casca esférica homogênea com um corpúsculo acelerado em seu interior, ainda que o corpúsculo esteja inicialmente parado em um ponto fora do centro da casca. Mostramos, assim, que o teorema XXX do Livro I do *Principia* não é válido quando se considera uma força gravitacional do tipo Weber e há uma aceleração relativa entre o corpo e a casca.³ Este é um dos pontos cruciais em que a Mecânica Relacional se diferencia da mecânica newtoniana e da TRG de Einstein. De fato, justamente por fornecer uma força sempre oposta à aceleração do corpo (como na *vis inertiae*, de Newton) é que a Mecânica Relacional interpreta a inércia como uma consequência da interação gravitacional entre a “casca-universo” (ou seja, a esfera celeste) e um corpo acelerado em relação a ela. Isso não é possível nas teorias de Newton e Einstein, pois elas sempre fornecem um resultado nulo para a interação da casca (em repouso) com corpos movendo-se em seu interior, mesmo que eles estejam acelerados. Isto impede que essas teorias associem a origem da inércia à interação gravitacional de um corpo com o resto do universo, impedindo-as assim de contemplar o princípio de Mach.⁴

AGRADECIMENTOS

LMC agradece o apoio financeiro recebido durante a realização deste trabalho, na forma de uma bolsa PIBIC do ProIC/DGP/UnB (CNPq, com contrapartida da FUB).

REFERÊNCIAS

- [1] I. Newton. *Principia – Princípios Matemáticos de Filosofia Natural. Livro I: O Movimento dos Corpos*. São Paulo: Nova Stella/Edusp, 1990.
- [2] I. Newton. *Principia – Princípios Matemáticos de Filosofia Natural. Livro II: O Movimento dos Corpos (em Meios com Resistência) e Livro III: O Sistema do Mundo (tratado matematicamente)*. São Paulo: Edusp, 2008.
- [3] A. Einstein, *Preussische Akad. der Wissenschaften, Sitzungsberichte* (part 2), 778 (1915). Ver adendo na pág. 801.
- [4] A. Einstein, *Annalen der Physik***49**, 769 (1916).
- [5] H. Thirring, *Physikalische Zeitschrift* **19**, 33 (1918).

³Note que esta semelhança com a força usada na eletrodinâmica de Weber faz com que o mesmo resultado não-nulo seja esperado no caso de uma carga puntiforme q sendo acelerada dentro de uma casca esférica uniformemente carregada com carga Q . De fato, isto foi previsto por Assis em 1993 [11] e observado por Mikhailov em três ocasiões [12, 13, 14].

⁴De fato, o jovem Einstein foi muito influenciado pelo livro “A ciência da mecânica”, de Mach [15]. Assim, a sua TRG foi, essencialmente, uma tentativa de implementar quantitativamente o princípio de Mach. Porém, ele acabou optando por uma teoria que não é *completamente relacional*, qual seja a TRG, na qual *um corpo tem inércia mesmo em um Universo vazio* (de Sitter), o que *contraria frontalmente o princípio de Mach* [16, 17].

- [6] H. Thirring, *Physikalische Zeitschrift* **22**, 29 (1921).
- [7] A. K. T. Assis, *Found. Phys. Lett.* **2**, 301 (1989).
- [8] A. K. T. Assis. *Eletrodinâmica de Weber*. Campinas, São Paulo: Ed. Unicamp, 1995.
- [9] A. K. T. Assis. *Mecânica Relacional e implementação do princípio de Mach com a força de Weber Gravitacional*. Montreal, Canada: Apeiron, 2013.
- [10] F. A. Palacios, R. B. Passaglia, and F. M. S. Lima, *Physicae Organum* **2**(2), 1 (2016).
- [11] A. K. T. Assis, *J. Phys. Soc. Japan* **62**, 1418 (1993).
- [12] V. F. Mikhailov, *Ann. Fond. Louis de Broglie* **24**, 161 (1999).
- [13] V. F. Mikhailov, *Ann. Fond. Louis de Broglie* **26**, 33 (2001).
- [14] V. F. Mikhailov, *Ann. Fond. Louis de Broglie* **28**, 231 (2003).
- [15] E. Mach. *The science of mechanics*, 6th Ed. La Salle: Open Court, 1960.
- [16] M. Reinhardt, *Zeit. Naturforschung A* **28**, 529 (1973).
- [17] D. J. Raine, *Rep. Progress Phys.* **44**, 1151 (1981).