Representações da Mecânica de Nambu no Espaço de Hilbert Simplético

CRISTIAN LANDRI * ADEMIR SANTANA†

Programa de Educação Tutorial (PET) e Centro Internacional de Física da Matéria Condensada, Instituto do Física, Universidade de Brasília, 70910-900, Brasília, DF, Brasil

Abstract

O presente trabalho intenta retomar as ideias de Yochiro Nambu sobre sua generalização da álgebra definida no espaço de fase simplético e investigar as liberdades associadas a uma representação da quantização dessa álgebra (ou n-gebra) segundo o formalismo de Heisenberg.

Palavras-Chave: Nambu, Simplética, Mecânica.

1 Introdução

Inspirado no formalismo Hamiltoniano da mecânica clássica, Yochiro Nambu propôs 1973 uma generalização do conceito de espaço de fase, que se acreditava somente poder ser definido em dimensões pares (pois descreve um par de variáveis canônicas, como posição e momento). No caso de Hamilton, a geometria subjacente é caracterizada por uma métrica simplética; e o trabalho de Nambu generaliza essa geometria para quaisquer dimensões (pares e ímpares) [9]. Isso passou a ser conhecido como uma n-gebra [1] A motivação original de Nambu era estudar uma estrutura algébrica compatível com o confinamento de quarks na matéria hadrônica, que podem aparecer aos pares ou em ternas. Nambu estudou realizações dessa estrutura a partir de simetrias SU(2),em particular para analisar procedimentos de quantização, através do princípio de correspondência de Dirac. Por esses motivos a estrutura de Nambu vem sendo abordada de diversas formas, em particular no contexto das teorias de cordas. Entretanto muitos aspectos demandam novos estudos A apresentação deste trabalho está organizada da seguinte maneira: Introdução na seção 1, logo após, na seção 2, uma revisão breve da formulação Hamiltoniana da Mecânica Clássica, enfatizando sua estrutura simplética. Na seção 3, introduzimos o conceito de Mecânica de Nambu e uma representação quântica. Na seção 4, apresentamos uma notação da representação para a Mecânica de Nambu, no espaço de Hilbert Simplético. Na seção 5, apresentamos as liberdades associadas ao triplete das variáveis canônicas, por fim apresentam-se as conclusões.

*cristianlandri@gmail.com

†asantana@unb.br

2 Formalismo Hamiltoniano

Recordando o formalismo hamiltoniano, seu principal axioma é o princípio da mínima ação $S = \int p\dot{q} - H(p,q,t)dt$, que pode ser traduzido nas chamadas equações canônicas do movimento ([5] e [8]).

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dH}{dp}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{dH}{dq}$$

Com H a função Hamiltoniana, dada pela soma das energias potenciais e cinética $H = U + T$, q a coordenada generalizada isto é o conjunto das coordenadas que descrevem o espaço e p o momento generalizado. Assim define-se a estrutura chamada parêntese de Poisson $\{\quad;\quad\} = \frac{d}{dq}\frac{d}{dp} - \frac{d}{dp}\frac{d}{dq}$, que pode resumir as duas equações anteriores da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}f(q,p,t) = \{f(q,p,t);H\} + \frac{\partial}{\partial t}f(q,p,t)$$

Desse modo é possível criar uma álgebra, que munido com a operação $\{\quad;\quad\}$, gere o Espaço de Fase sobre o conjunto do produto cartesiano entre posição e momento (q $\times$ p , $\{\quad;\quad\}$). Pelo teorema de Liouvile o espaço convencional das coordenadas e o espaço de fase são homomórficos e há de se notar que o espaço de fase é sempre de dimensão par, pois ele é formado por um par de conjuntos de mesma dimensão.

3 Mecânica de Nambu e sua representação quântica

Na tentativa de definir espaços de fase de dimensão ímpar, surgem as medidas feitas por Nambu para empoderar a mecânica nesse sentido. Em seu artigo de 1973, Nambu redefine o conceito de momento e posição generalizada para adotar as variáveis dinâmicas. Em analogia às equações de evolução do sistema, em que uma derivada temporal era relacionada como as derivadas do hamiltoniano, agora definindo um triplete de variáveis dinâmicas (x,y,z) as novas equações de hamilton se tornam:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial(H,G)}{\partial(y,z)}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial(H,G)}{\partial(z,x)}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial(H,G)}{\partial(z,y)}$$

Nessas equações surge a necessidade de uma nova função hamiltoniana, a função G. Dessa maneira os parênteses de Poisson assumem uma nova estrutura. Passariam a se chamar de parênteses de Nambu, preservando as propriedade necessárias para se construir um produto de Lie [7], são elas: a derivabilidade, a anti simetria e identidade de Jaccobi, que são respectivamente:

$$\{A_1A_2;B;C\} = A_1\{A_2;B;C\} + \{A_1;B;C\}A_2$$

$$\{A;B;C\} = -\{B;A;C\} = \{B;C;A\} \quad etc.$$

$$\{A;B;\{A_1;A_2;A_3\}\} = \{\{A;B;A_1\};A_2;A_3\} + \{A_1;\{A;B;A_2\};A_3\} + \{A_1;A_2;\{A;B;A_3\}\}$$

O que leva a equação de Hamilton à:

$$\frac{d}{dt}f(x,y,z) =< \nabla f(x,y,z);(\nabla H \times \nabla G) >$$

Nambu chama atenção para o fato de as equações de Euler serem encontradas, com L_x, L_y, L_z como as componentes do momento angular e I_x, I_y, I_z a diagonal do tensor de inércia, se tivermos:

$$G = \frac{1}{2}(\frac{L_x^2}{I_x} + \frac{L_y^2}{I_y} + \frac{L_z^2}{I_z})$$

$$H = \frac{1}{2}(L_x^2 + L_y^2 + L_z^2)$$

Em seu artigo Nambu propôs relaxar as condições do parêntesis para que fossem geradas representações no espaço de fase da mecânica quântica, e em especial, para que fosse obedecida a relação de Heisenberg: $[X,P] = -\frac{i}{\hbar}$ Assim a quantização das variáveis canônicas (x,y,z) seria de tal forma que aplicando-se a regra de Dirac aos parêntesis de Nanbu fosse retomada a relação de Heisenberg. No espaço de fase quântico as variáveis canônicas se tornam (X,Y,Z) satisfazendo: $[X,Y,Z] = -\frac{i}{\hbar}$, sendo este comutador preservando as propriedades relaxadas dos parênteses de Nambu. A anti simetria e a derivabilidade podem ser vistas de duas formas diferentes, cada uma, no contexto de uma álgebra não comutativa. As combinações possíveis desse par de duas propriedades foi a liberdade a que o Nambu submeteu seus parêntesis, sejam elas:

- Antisimetria:

  $$[A,B,C] = -[A,C,B] = [C,A,B]$$

  ou

  $$[A,A,B] = [A,B,A] = 0$$

- Derivabilidade:

  $$[A_1A_2,B,C] = A_1[A_2,B,C] + [A_1,B,C]A_2$$

  ou

  $$[A_1A_2,B,C] = [A_1,B,C]A_2 + A_1[A_2,B,C]$$

Combinando-se essas propriedades e na tentativa de satisfazer a identidade de Jaccobi e a nova relação de Heisenberg, Nambu desenvolveu 6 representações possíveis de sua teoria. O presente trabalho se esmerou em redefinir os operadores das variáveis canônicas de uma dessas representações, a saber, a cujos operadores são identificados da seguinte forma: $(X,Y,Z)\alpha(L_x,L_y,L_z)$ os operadores momento angular em cada direção. Nessa representação por questões de normalização, define-se um operador de Casimir dado por: $C = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ e assim o conjunto dos operadores das variáveis canônicas se torna: $(X,Y,Z) = C^{1/3}(L_1,L_2,L_3)$. Sobre essa representação, deseja-se ressignificar os operadores L_τ na tentativa de vislumbrar mais liberdade da teoria. A quantização do formalismo da mecânica de nambu ainda não é ao todo esclarecida ([2] e [3]), mas amparado pelo teorema de Liouville, é possível valer-se da regra de Dirac para quantização dos parênteses de Nambu. A regra de Dirac afirma que existe a transição entre a mecânica clássica e a mecânica quântica trocando-se a estrutura dos parênteses de Poisson (neste caso os parênteses de Nambu) pelo comutador e as grandezas determinísticas da mecânica clássica pelos operadores probabilísticos quânticos [11]. Para se fazer real a regra de Dirac, é preciso achar quais são esses operadores, que acabam por receber outras representações nesse novo formalismo. A proposta de Nambu foi de assumir os operadores: X,Y e Z com a seguinte relação de quantização $[X;Y;Z] = -i$ [1] desse modo a equação de Heisenberg assume a forma mais próxima ao caso conhecido: $\frac{dF(x,y,z)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[F;H;G]$.

4 Representações simpléticas no espaço de Hilbert

As equações de Hamilton e os parêntesis de poisson clássico podem ser simplificados lançando mão das estruturas e notações simpléticas. Nesta representação são inseridos índices para representar as entidades de uma álgebra vetorial, e o produto de duas quantidades com índices iguais, significam somas, assim as equações se tornam [10]:

$$\{A,B\} = \eta^{\nu\mu}\frac{\partial A}{\partial x^\nu}\frac{\partial B}{\partial x^\mu}; \quad x^\nu = (q_1,q_2,...,q_n,p_1,p_2,...,p_n)$$

$\eta^{\mu\nu}$ é uma matriz em que seus elementos podem ser dados pela relação: $\eta^{\mu\nu+n} = \delta^{\mu\nu}$;$\eta^{\mu+n\nu} = -\delta^{\mu\nu}$, com $\eta^{\mu\nu}$ for de dimensão $2n \times 2n$. A equação de evolução do sistema se torna então:

$$\frac{dF(x^\nu)}{dt} = \{F;H\} = \eta^{\nu\mu}\frac{\partial F}{\partial x^\nu}\frac{\partial H}{\partial x^\mu}$$

Para aprimorar ainda mais a notação, recorrendo à álgebra, pode-se dizer que isso se trata de uma operação entre um espaço e seu dual métrico. Denotando os índices em cima para representar a dualidade com relação aos índices em baixo, simplifica-se:

$$\frac{\partial F}{\partial x^\mu} = \partial_\mu F$$

ou seja:

$$\frac{dF(x^\nu)}{dt} = \eta^{\nu\mu}\partial_\nu F\partial_\mu H$$

Com esta notação é possível dar aos parênteses de Nambu uma estrutura semelhante àquela dada aos parênteses de Poisson. Recorda-se que os parêntesis devem satisfazer as propriedades listadas na secção 3, por isso ele toma a forma:

$$\{A,B,C\} = \varepsilon^{ijk}\partial_i A \partial_j B \partial_k C$$

Com ε^{ijk} o símbolo de Levi civita totalmente antissimétrico. ε^{ijk} para qualquer permutação par da palavra $(i,j,k) = (1,2,3)$ e $\varepsilon^{ijk} = -1$ do contrário. Em mecânica quântica, vetores no espaço de Hilbert representam estados quânticos, mas a evolução do sistema pode ser visto em duas perspectivas. Quando os vetores são parametrizados pelo tempo, dá-se o nome dessa óptica de representação de Schrödiger, mas é possível que os vetores sejam fixos, e os operadores responsáveis pela equação de autovalores variem com o tempo, então essa é a representação de Heisenberg. Adotando-se a representação de Heisenberg, os operadores definidos dentro do espaço de Hilbert podem ser representados como P_i . Valendo-se do segundo postulados da mecânica quântica é possível vislumbrar as equações de evolução dos sistemas clássicos com uma versão quântica como: $\frac{dP_i}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[P_i,H]$ onde H é o operador hamiltoniano e $[,]$ o comutador. Usando-se essa nova notação, a representação tratada por Nambu na secção anterior revela uma álgebra de Lie com as relações de comutação dadas por: $[L_\nu, L_\mu] = i\varepsilon_{\nu\mu\tau}L_\tau$ com os colchetes representando o comutador tradicional.

5 Investigando liberdades associadas ao triplete de variáveis canônicas

As grandezas momento e posição podem ser vistas como geradoras do momento angular, a saber: $\vec{L} = \vec{p} \times \vec{q}$ ou na notação exposta acima: $L_i = \varepsilon_{ijk} q_j p_k$ Em uma representação quântica as grandezas q e p podem ser ressignificadas para os operadores Q e P os quais devem obedecer a relação de Heisenberg [11]. Recorda-se que os operadores posição e momento podem assumir a seguinte representação:

$$Q = q$$

e

$$P = -\frac{i}{\hbar}\frac{\partial}{\partial q}$$

Porém esses operadores podem ser redefinidos sempre obedecendo a relação de Heisenberg. Uma forma conveniente de defini-los é como:

$$Q = \alpha_1 q + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial p}$$

e

$$P = \beta_1 p + \beta_2 \frac{\partial}{\partial q}$$

Observa-se que esses novos operadores são mais gerais pois preservam o caso conhecido quando: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 = -\frac{i}{\hbar}$ e apresentam uma liberdade maior, na medida em que obedecem a relação de Heisenberg. Recordando-se de tudo o que foi exposto no presente trabalho, deseja-se aliar a representação da mecânica de Nambu supracitada com a redefinição do operador momento angular dado por $L_i = \varepsilon_{ijk} Q_j P_k$ e a dita expansão da liberdade dos operadores acima. Apenas dessa vez a relação de Heisenberg a ser obedecida será a relação de comutação dos operadores L_i que remonta à relação de Heisenberg-Nambu: $[X,Y,Z] = -\frac{i}{\hbar}$. Para gozar de uma liberdade ainda maior podem ser gerados os operadores Quânticos dados por:

$$Q_i = \alpha_{1i} q_i + \alpha_{2i} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

e

$$P_i = \beta_{1i} p_i + \beta_{2i} \frac{\partial}{\partial q_i}$$

Assim adota-se $\hbar = 1$ e a relação que deve ser obedecida e que auxiliará a criar os vetores é:

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk} L_k$$

$$[(\varepsilon_{i\mu\nu} Q_\nu P_\mu), (\varepsilon_{j\tau\phi} Q_\tau P_\phi)] = \varepsilon_{k\eta\rho} Q_\eta P_\rho$$

$$\begin{aligned}[][\varepsilon_{i\mu\nu}(\alpha_{1\nu} q_\nu + \alpha_{2\nu}\frac{\partial}{\partial p_\nu})(\beta_{1\mu} p_\mu + \beta_{2\mu}\frac{\partial}{\partial q_\mu}), \varepsilon_{j\tau\phi}(\alpha_{1\tau} q_\tau + \alpha_{2\tau}\frac{\partial}{\partial p_\tau})(\beta_{1\phi} p_\phi + \beta_{2\phi}\frac{\partial}{\partial q_\phi})] = \\ = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{k\eta\rho}(\alpha_{1\eta} q_\eta + \alpha_{2\eta}\frac{\partial}{\partial p_\eta})(\beta_{1\rho} p_\rho + \beta_{2\rho}\frac{\partial}{\partial q_\rho})\end{aligned}$$

Reunindo termos em comutadores pode-se simplificar a expressão acima unindo os termos de q_τ com $\frac{\partial}{\partial q_\nu}$ e p_ν com $\frac{\partial}{\partial p_\tau}$. Se for investigada a relação de comutação entre q_τ e $\frac{\partial}{\partial q_\nu}$, e também p_ν e $\frac{\partial}{\partial p_\tau}$ pode-se provar que:$[q_\tau, \frac{\partial}{\partial q_\nu}] = -\delta_{\nu\tau}$ e $[p_\nu, \frac{\partial}{\partial p_\tau}] = -\delta_{\nu\tau}$. A equação simplificada que se deve satisfazer, sem perda de generalidade, então é:

$$\begin{aligned}-M_\mu \varepsilon_{i\nu\mu}\varepsilon_{j\mu\phi}(\alpha_{1\mu}\beta_{1\phi} q_\mu p_\phi + \alpha_{1\mu}\beta_{2\phi} q_\mu \frac{\partial}{\partial q_\phi} + \alpha_{2\mu}\beta_{1\phi}\frac{\partial}{\partial p_\mu} p_\phi + \alpha_{2\mu}\beta_{2\phi}\frac{\partial}{\partial p_\mu}\frac{\partial}{\partial q_\phi}) = \\ = i\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{k\eta\rho}(\alpha_{1\eta}\beta_{1\rho} q_\eta p_\rho + \alpha_{1\eta}\beta_{2\rho} q_\eta \frac{\partial}{\partial q_\rho} + \alpha_{2\eta}\beta_{1\rho}\frac{\partial}{\partial p_\eta} p_\rho + \alpha_{2\eta}\beta_{2\rho}\frac{\partial}{\partial p_\eta}\frac{\partial}{\partial q_\rho})\end{aligned}$$

Com $M_\mu = (\alpha_{1\mu}\beta_{2\mu} - \beta_{1\mu}\alpha_{2\mu})$.

É possível provar que $\varepsilon_{i\nu\mu}\varepsilon_{j\mu\phi} = -\varepsilon_{ijk}\varepsilon k\eta\rho$ ([6] e [3]), usa-se apenas algumas propriedades de epsilons e deltas de kronecker. O importante é que esta equação admite muitas soluções, e em especial existe uma solução imediata a ser discutida em conclusões. Para M_μ exclusivamente de natureza covariante, desenvolve-se a equação para os índices de μ , ν e ϕ, chamando $F_{\eta\rho} = \alpha_{1\eta}\beta_{1\rho} q_\eta p_\rho + \alpha_{1\eta}\beta_{2\rho} q_\eta \frac{\partial}{\partial q_\rho} + \alpha_{2\eta}\beta_{1\rho}\frac{\partial}{\partial p_\eta} p_\rho + \alpha_{2\eta}\beta_{2\rho}\frac{\partial}{\partial p_\eta}\frac{\partial}{\partial q_\rho}$ e sabendo que $\varepsilon_{i\tau\alpha}\varepsilon_{\tau\alpha j} = \delta_{iy}\delta_{jy}$ com $y \neq \tau, \alpha$ a parte direita da equação será:

$$i(\delta_{i\eta}\delta_{j\rho} - \delta_{i\rho}\delta_{j\eta})F_{\eta\rho}$$

A parte esquerda:

$$(M_3\delta_{i2}\delta_{j2} + M_2\delta_{i3}\delta_{j3})F_{11} - M_3\delta_{i2}\delta_{j1}F_{12} - M_2\delta_{i3}\delta_{j2}F_{13} + (M_1\delta_{i3}\delta_{j3} + M_3\delta_{i1}\delta_{j1})F_{22} - M_3\delta_{i1}\delta_{j2}F_{21}$$
$$- M_1\delta_{i3}\delta_{j2}F_{23} + (M_1\delta_{i2}\delta_{j2} - M_2\delta_{i1}\delta_{j1})F_{33} - M_2\delta_{i1}\delta_{j3}F_{31} - M_1\delta_{i2}\delta_{j3}F_{32}$$

6 Conclusões

É notável a maior liberdade que essa teoria proporciona em relação ao formalismo tradicional da mecânica quântica, maior ainda se torna a sua utilidade com a generalização proposta dos operadores q e p. É óbvio que tal formalismo só tem utilidade se puder reproduzir o conteúdo físico desenvolvido no último século, isto pode ser evidenciado na medida em que a relação de Heisenberg é preservada, o que se faz verdade devido à equação apresentada para M_μ.

Para evidenciar que a relação de Heisenberg é satisfeita basta notar que M_μ não precisa ter necessariamente um caráter covariante, pois tal característica foi inserida no desenvolvimento para aumentar a liberdade das representações, assim fazer a conversão de $M_\mu \to M$ não desmerece as equações. Dito isso como os índices η e k estão contraídos a relação mais imediata a se obter é $M = -i$, ou seja existe uma representação mais geral do que aquela de Heisenberg, dada por: $\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 = -i$, pois note que para $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \beta_1 = 0, \beta_2 = -i$ essa relação é satisfeita.

Mais do que isso, talvez o resultado mais relevante, é a comparação dos resultados de Isabela Couto et. al. [4], os seus parâmetros α e β são definidos de forma diferente, mas fazendo as devidas conversões, percebe-se que esse caso trata-se exatamente do mesmo resultado. as representações dadas por: $\alpha_1 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = i, \beta_1 = \frac{1}{2}, \beta_2 = -i$ e $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \beta_1 = 1, \beta_2 = -\frac{i}{2}$, são aquelas referentes à Torres-Vegas [15] e A. E. Santana et. al. [12] respectivamente.

O caso covariante é de uma complexidade tal que se torna ineficiente expressar todos as suas possibilidades, no entanto um caso particular interessante é quando se igualam os termos que contem $F_{\eta\rho}$ $\forall$ η e ρ da esquerda e da direita, desse modo um sistema de 9 equações é formado. Adotando-se $\bar{\sigma} \in S_3$ [14] o conjunto das permutações de 1 a 3 o sistema pode ser denotado:

$$M_{\bar{\sigma}(\tau)}\delta_{1\bar{\sigma}^2(\tau)}\delta_{j\bar{\sigma}^2(\tau)} + M_{\bar{\sigma}^2(\tau)}\delta_{i\bar{\sigma}(\tau)}\delta_{j\bar{\sigma}(\tau)} = 0$$

$$M_\tau\delta_{i\bar{\sigma}(\tau)}\delta_{j\bar{\sigma}^2(\tau)} = i(\delta_{i\bar{\sigma}^2(\tau)}\delta_{j\bar{\sigma}(\tau)} - \delta_{i\bar{\sigma}(\tau)}\delta_{j\bar{\sigma}^2(\tau)})$$

$$M_\tau\delta_{i\bar{\sigma}^{-1}(\tau)}\delta_{j\bar{\sigma}^{-2}(\tau)} = i(\delta_{i\bar{\sigma}^{-2}(\tau)} - \delta_{i\bar{\sigma}^{-1}(\tau)}\delta_{j\bar{\sigma}^{-2}(\tau)})$$

Essas igualdades são válidas para qualquer permutação do subconjunto de S_3 dado por $\{\bar{\sigma} \in S_3 / \tilde{\sigma}\ \forall\ \tilde{\sigma}$ t.q. $\tilde{\sigma}^{-1} = \tilde{\sigma}\}$

7 Referências

[1] A.E.Santana and R.Muradian. , :, .

[2] H. Awata and M. Li. , :, .

[3] E. Butkov. Mathematical physics, volume unico. Addison-Wesley, 1973.

[4] I. Couto and A. Santana.artigo de PIBIC, -:–, 2016.

[5] N. M. E.C.G. Sudarshan. Classical dynamics, volume unico.Wiley-Interscience, 1974.

[6] S. Hassani.Mathematical Physics A Modem Introduction to Its Foundations, volume unico. Library of congress, 1999.

[7] J.-S. Huang.Lectures on Representation Theory, volume unico. World Scientific Publishing Company, 2000.

[8] L. D. Landau.Mechanique Classique, volume unico. editions mir, 1966.

[9] Y. Nambu.Physical Review D, 7:2405, 1973.

[10] C. G. Oliveira.Journal of Mathematical Physics, 18:120, 1976.

[11] J. J. Sakurai and J. J. Napolitano.Modern Quantum Mechanics, volume unico. Addison-Wesley, 1994.

[12] A. Santana and A. R. Filho.Rev. Bras. Ens. Fis., 22:199, 2000.

[13] S.Codriansky.Revista Mexicana de Fisica, 49:103, 2003.

[14] W. C. Shculz.Theory and Applications of Grasmann Algebra, volume único. Transgalactic publishing Company, 2011.

[15] G. Torres-Vega and J. Frederick.J. Chem. Phys., 12:93, 1990.