

Força gravitacional exercida por uma casca esférica sobre um corpo acelerado dentro dela

FELÍCIA A. PALACIOS*

RAFAEL B. PASSAGLIA†

FÁBIO M. S. LIMA‡

Instituto de Física, Universidade de Brasília

9 de setembro de 2016

Resumo

Em 1687, Newton, supondo uma força de atração inversamente proporcional ao quadrado da distância, demonstrou que é nula a força gravitacional exercida por uma casca esférica com distribuição uniforme de massa sobre um corpúsculo localizado em qualquer ponto do seu interior. Como a lei de força proposta por Newton não inclui velocidades e acelerações entre os corpos que se atraem, então a força exercida pela casca deve permanecer nula mesmo que o corpúsculo esteja em movimento em relação à casca. Esse mesmo resultado nulo também é previsto pela teoria da Relatividade Geral, de Einstein. Nesta nota, mostramos que a Mecânica Relacional fornece um resultado não-nulo quando o corpo, inicialmente em repouso, é acelerado em relação à casca.

Palavras-chave: Força gravitacional, Teorema das cascas, Princípio de Mach, Mecânica Relacional.

I. INTRODUÇÃO

Nas Seção XII, Proposições 70 e 71, do livro I do monumental *Principia*, publicado em 1687 [1], I. Newton (1642-1727) provou dois teoremas fundamentais para o seu “sistema do mundo” (estabelecido no livro III), quais sejam os Teoremas XXX e XXXI, que determinam a força gravitacional exercida por uma casca esférica com distribuição uniforme de massa sobre um corpúsculo (um corpo com tamanho desprezível em compa-

ração com a casca), de acordo com a sua lei universal de gravitação, estabelecida no livro III do *Principia* [2]. No teorema XXX, Newton provou que a força gravitacional exercida pela casca é **nula** quando o corpo está localizado em qualquer ponto do interior da casca. Nas suas palavras [1]:

Se para cada ponto de uma superfície esférica tenderem forças centrípetas iguais, que diminuem com o quadrado das distâncias a partir desses pontos, afirmo que um

*Graduanda do IF-UnB.

†Graduando do IF-UnB.

‡Prof. Adjunto do IF-UnB. Corresponding author: fabio@fis.unb.br

corpúsculo localizado dentro daquela superfície **não será atraído de maneira alguma** por aquelas forças.

É óbvio que, devido à simetria da casca esférica, qualquer força que só dependa da distância entre os corpos interagentes fornecerá uma resultante nula quando o corpo estiver *no centro* da casca. A parte não-trivial do teorema é que a força também será nula caso o corpo esteja *fora do centro*. Como a lei universal de gravitação de Newton assume que a interação gravitacional só depende do produto das massas gravitacionais e do inverso do quadrado da distância entre elas [2],¹ então a força exercida pela casca deve permanecer nula mesmo que o corpo em seu interior possua alguma velocidade ou aceleração em relação à casca. O teorema XXX foi fundamental para que Newton pudesse desprezar a influência das estrelas distantes sobre o movimento dos corpos nas proximidades da Terra e no sistema solar, já que elas estão distribuídas de forma aleatória e praticamente homogênea por toda a esfera celeste (ver Corolário 2 da Proposição 14, Teorema 14, no livro III).² Esse mesmo resultado nulo também é previsto, quando a esfera está em repouso, pela Teoria da Relatividade Geral (TRG), proposta por A. Einstein (1879-1955) em 1915 [3], numa forma preliminar, e no formato definitivo em 1916 [4]. Este resultado nulo da TRG pode ser facilmente obtido, por exemplo, tomando-se $\omega = 0$ no resultado obtido em 1918 por H. Thirring (1888-1976) para a força gravitacional exercida por uma casca girante sobre um corpo em seu interior (ver Ref. [5] e uma correção na Ref.[6]).

Tendo em vista que a TRG não contempla o princípio de Mach, o qual afirma que a inércia de um corpo é determinada pela distribuição das massas do resto do Universo,³ conforme é amplamente discutido na Ref. [7] e suas referências, o brasileiro A. K. T. Assis propôs em 1989 a Mecânica Relacional como uma teoria alternativa às teorias de gravitação de Newton e de Einstein, com a vantagem de contemplar o princípio de Mach em todas as situações possíveis [8]. Na Mecânica Relacional, postula-se uma versão gravitacional da força eletrodinâmica de Weber, a qual possui, além do termo coulombiano usual (estático), termos que dependem da velocidade e da aceleração relativas entre as cargas interagentes [9]. No livro “Mecânica Relacional”, publicado em 2013 [7], Assis apresenta sua nova mecânica de uma forma bem didática, analisando diversos casos de movimento relativo (translação e rotação) entre uma casca esférica e um corpúsculo movendo-se tanto dentro quanto fora da casca, mostrando que, em geral, o movimento relativo acelerado faz com que um corpo exerça uma força não-nula sobre o outro. Entretanto, no caso em que estamos interessados aqui (um corpo movendo-se aceleradamente no interior da casca), aquele autor afirma que a casca exercerá uma força não-nula sobre o corpo [7, Apêndice A.1], mas não fornece uma demonstração matemática completa. Por ocasião da X Semana da Física, realizada no IF-UnB em 2015, foi ministrado o minicurso “Introdução à Mecânica Relacional”, no qual o palestrante (o próprio Prof. Assis) sugeriu que o cálculo da integral de superfície dos elementos de força, que geralmente

¹Em linguagem moderna, essa lei estabelece que: “Cada partícula de matéria atrai qualquer outra partícula com uma força proporcional ao produto de suas massas gravitacionais e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas.”

²O teorema XXXI estabelece que haverá atração gravitacional quando o corpo estiver fora da casca esférica, devendo-se utilizar a distância até o centro da casca. Isto nos permite tratar o Sol e a Terra, por exemplo, como massas puntiformes.

³O nome “princípio de Mach” foi dado por Schlick em 1915 e passou a ser amplamente referido com este nome após a publicação de um artigo de Einstein, em 1918, no qual ele referiu-se diretamente à hipótese levantada por E. Mach (1838-1916), em uma crítica ao espaço absoluto de Newton, de que os efeitos inerciais em um corpo devem ser causados pela interação do corpo com o restante do Universo. De acordo com Mach, um corpo isolado em um espaço vazio não deve possuir inércia.

é bem complexo, fosse feito pelos espectadores no caso mais simples do corpo acelerado, mas inicialmente parado no centro da casca. Nesta nota, apresentaremos a demonstração matemática completa correspondente a essa situação.

II. CÁLCULO DA FORÇA EXERCIDA PELA CASCA ESFÉRICA

Consideremos uma situação particular em que um corpúsculo com massa gravitacional m encontra-se inicialmente parado no centro de uma casca esférica de raio R , cuja massa gravitacional M está uniformemente distribuída com uma densidade superficial $\sigma = M/(4\pi R^2)$. Suponha que, no instante $t = 0$, o corpo passa a ser acelerado na direção do eixo z , como indicado na Fig. 1.⁴ A versão gravitacional da força de Weber exercida por um corpo de massa m_1 sobre um corpo de massa m_2 , como proposta originalmente por Assis, é [8]:⁵

$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \left[1 - \frac{\xi}{c^2} \left(\frac{\dot{r}^2}{2} - r\ddot{r} \right) \right] \hat{r}_{21}, \quad (1)$$

onde $\hat{r}_{21} \equiv (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)/r$, G é a constante universal de gravitação e c é a velocidade da luz no vácuo. Embora ξ seja um parâmetro livre da teoria, Assis observou que $\xi = 6$ leva à correta precessão do periélio do planeta Mercúrio. Com este valor, a força exercida pelo elemento de massa dM de uma casca esférica (que fará o papel de m_1) sobre um corpúsculo de massa m localizado em seu interior fica [7]:

$$d^2\vec{F}_{12} = -\frac{Gm dM}{r^2} \left(1 - 3\frac{\dot{r}^2}{c^2} + 6\frac{r\ddot{r}}{c^2} \right) \hat{r}_{21}, \quad (2)$$

onde $dM = \sigma dS$, com $dS = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ sendo o elemento de área em coordenadas esféricas,

$\hat{r}_{21} = -\vec{r}/r = -\hat{r}$, \hat{r} sendo o vetor unitário na direção radial (das coordenadas esféricas), como indicado na Fig. 1. Note que, além do termo newtoniano, há um termo que depende da velocidade relativa \dot{r} e outro que depende da aceleração relativa \ddot{r} . Para calcular a força total exercida pela casca sobre o corpo, que é a integral de superfície de $d^2\vec{F}_{12}$, primeiramente vamos desprezar o termo newtoniano (que só depende de r), pois, de acordo com o teorema XXX de Newton, ele fornecerá uma integral nula. Isto reduz o problema a:

$$\vec{F}_{12} = -Gm\sigma R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{r^2} \left(-3\frac{\dot{r}^2}{c^2} + 6\frac{r\ddot{r}}{c^2} \right) \times \hat{r}_{21} \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (3)$$

Como o corpo encontra-se inicialmente parado no centro da casca, mantida em repouso em relação a um referencial inercial, teremos $\vec{v}_2(0) = \vec{0}$ e $\vec{v}_1 = \vec{0}$, portanto, o termo que contém a velocidade relativa $\dot{r} = (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot \hat{r}_{21} = -\vec{v}_2 \cdot \hat{r}$ é nulo em $t = 0$. Resta, assim, somente a integral do termo com \ddot{r} :

$$\vec{F}_0 = \frac{6Gm\sigma R^2}{c^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\ddot{r}}{r} \hat{r} \sin\theta d\theta d\varphi, \quad (4)$$

onde usamos o fato de que $\hat{r}_{21} = -\hat{r}$. A aceleração relativa \ddot{r} é facilmente determinada observando-se que a casca permanece em repouso, de modo que $\vec{a}_1 = \vec{0}$, enquanto que o corpúsculo é acelerado para baixo em relação a ela, ou seja $\vec{a}_2 = -a\hat{k} = cte.$, onde $a > 0$ é o módulo da aceleração

⁴É claro que esta aceleração está sendo provocada pela ação de alguma força externa, oriunda de outro corpo que não a casca esférica, como ocorreria, por exemplo, nas proximidades da Terra, caso em que a aceleração (de queda livre) seria $\vec{a} = -g\hat{k}$, com $g \cong 9,8 \text{ m/s}^2$.

⁵Como usual, cada derivada temporal é indicada por um ponto acima da variável.

(tangencial) do corpúsculo. Dessa forma:

$$\begin{aligned}
 \ddot{r} &\equiv \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d(-\vec{v}_{21} \cdot \hat{r})}{dt} = - \left(\frac{d\vec{v}_{21}}{dt} \cdot \hat{r} + \vec{v}_{21} \cdot \frac{d\hat{r}}{dt} \right) \\
 &= - \frac{d(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{dt} \cdot \hat{r} - \vec{v}_{21} \cdot \frac{d(\vec{r}/r)}{dt} \\
 &= - (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \cdot \hat{r} - \vec{v}_{21} \cdot \left(-\frac{\vec{v}_{21}}{r} - \frac{\dot{r}}{r^2} \vec{r} \right) \\
 &= - \left(-a\hat{k} - \vec{0} \right) \cdot \hat{r} + \frac{\vec{v}_{21} \cdot \vec{v}_{21}}{r} + \vec{v}_{21} \cdot \left(\frac{\dot{r}}{r} \hat{r} \right) \\
 &= a\hat{k} \cdot \hat{r} + \frac{\vec{v}_{21} \cdot \vec{v}_{21}}{r} + \frac{(\vec{v}_{21} \cdot \hat{r})^2}{r}, \quad (5)
 \end{aligned}$$

o que reduz-se a $\ddot{r} = a\hat{k} \cdot \hat{r}$, já que $\vec{v}_{21} = \vec{0}$ em $t = 0$. Levando este resultado na Eq. (4), obtemos

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_0 &= \frac{6Gm\sigma R^2}{c^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(a\hat{k} \cdot \hat{r})}{R} \hat{r} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \\
 &= \frac{6Gm\sigma R}{c^2} a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\hat{k} \cdot \hat{r}) \frac{\vec{r}}{R} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \\
 &= \frac{6Gm\sigma R}{c^2} a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{z}{R} \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{R} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \\
 &= \frac{6Gm\sigma}{Rc^2} a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi z(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (6)
 \end{aligned}$$

A integral acima pode ser resolvida fazendo-se

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{2\pi} \int_0^\pi z(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi xz \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \hat{i} \\
 &+ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi yz \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \hat{j} \\
 &+ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi z^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \hat{k} \quad (7)
 \end{aligned}$$

e substituindo-se $x = R \cos\varphi \sin\theta$, $y = R \sin\varphi \sin\theta$ e $z = R \cos\theta$, o que fornece, para cada integral:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{2\pi} \int_0^\pi xz \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \\
 &= R^2 \int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi \int_0^\pi \sin^2\theta \cos\theta \, d\theta \quad (8)
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{2\pi} \int_0^\pi yz \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \\
 &= R^2 \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^\pi \sin^2\theta \cos\theta \, d\theta, \quad (9)
 \end{aligned}$$

que são ambas nulas porque $\int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, d\varphi = 0$, e

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{2\pi} \int_0^\pi z^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \\
 &= R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \\
 &= 2\pi R^2 \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \\
 &= 2\pi R^2 \int_{-1}^{+1} u^2 \, du \\
 &= \frac{4}{3} \pi R^2. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Na última integral, fizemos a substituição simples $u = \cos\theta$. Substituindo estes resultados na Eq. (6), obtemos, por fim,

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_0 &= \frac{6Gm\sigma}{Rc^2} a \frac{4}{3} \pi R^2 \hat{k} \\
 &= \frac{2GM}{Rc^2} ma\hat{k}, \quad (11)
 \end{aligned}$$

que é o resultado não-nulo que desejávamos obter. Nosso resultado pode ser escrito na forma $\vec{F}_0 = -\gamma m \vec{a}$, onde $\gamma \equiv 2GM/(Rc^2)$ é uma constante positiva, de modo que a força exercida pela casca será sempre no sentido oposto à aceleração \vec{a} do corpúsculo em relação à casca. Este resultado é a base de toda a Mecânica Relacional, sendo essencial para a implementação do princípio de Mach, como feito nas Refs. [7, 8].

III. CONCLUSÃO

Tanto a lei universal de gravitação, de Newton, como a teoria da Relatividade Geral, de Einstein, prevêm que a força gravitacional exercida

por uma casca esférica homogênea (em repouso) sobre um corpúsculo localizado em seu interior é nula, qualquer que seja a sua posição e o seu estado de movimento em relação à casca, como provado no teorema XXX do livro I do *Principia* [1]. Nesta nota, mostramos matematicamente que a Mecânica Relacional fornece um resultado *não-nulo* quando o corpúsculo, inicialmente parado no centro da casca, é acelerado em relação a ela, mostrando assim que o teorema XXX não é válido quando se considera uma força gravitacional do tipo Weber e há uma aceleração relativa entre os corpos.⁶ Este é um dos pontos cruciais em que a Mecânica Relacional se diferencia das teorias de Newton e de Einstein. De fato, justamente por fornecer uma força $-\gamma m \vec{a}$, portanto sempre oposta à aceleração do corpúsculo (como na força de inércia, ou *vis insita*, de Newton), é que a Mecânica Relacional interpreta a origem da inércia como uma consequência da interação gravitacional entre a “casca-universo” (ou seja, a esfera celeste) e um corpo acelerado em relação a ela.⁷

Einstein sempre deixou claro que foi muito influenciado pelo livro “A ciência da mecânica”, de Mach [13]. De fato, ele tentou obter uma teoria capaz de reproduzir quantitativamente as idéias de Mach, como vemos no seguinte comentário de J. B. Barbour [14]:

O próprio Einstein afirmou que a maneira mais simples de realizar o objetivo da Relatividade seria formular as leis do movimento diretamente, e desde o início, **apenas em termos das distâncias relativas e velocidades relativas**. Ele apontou a impraticabilidade desta rota como o motivo para não escolhê-la. De acordo com ele, a história da ciência tinha demonstrado a **impossibilidade prática de dispensar os sistemas de coordenadas**.

Se o *alemão* Einstein tivesse tomado conhecimento da eletrodinâmica de Weber (1846) [9], que é *completamente relacional*, ele certamente não teria dito isto! Como, aparentemente, isto não ocorreu, Einstein acabou seguindo um caminho diferente, que culminou com a TRG, na qual um corpo tem inércia mesmo em um Universo vazio (o Universo de de Sitter), contrariando frontalmente o princípio de Mach e frustrando suas expectativas. Sobre este aspecto negativo da TRG de Einstein, ver as Refs. [15, 16, 17, 18]. Em alguns trabalhos de M. Ghins [19, 20], mostra-se inclusive que o conceito de espaço-tempo, na TRG, é *absoluto*, existindo independentemente da matéria distante (estrelas e galáxias), contrariando novamente as idéias de Mach.

⁶Note que esta semelhança com a força usada na eletrodinâmica de Weber faz com que o mesmo resultado não-nulo seja esperado no caso de uma carga puntiforme q sendo acelerada dentro de uma casca esférica uniformemente carregada com carga Q . De fato, isto foi previsto por Assis em 1993 [10] e observado por Mikhailov em duas ocasiões [11, 12].

⁷Isso não é possível nas teorias de gravitação de Newton e Einstein, pois elas sempre fornecem um resultado nulo para a interação da casca (em repouso) com corpos acelerados em seu interior. Por isso é que elas não conseguem identificar a origem da força de inércia na forma de uma interação gravitacional entre um corpo e o resto do universo.

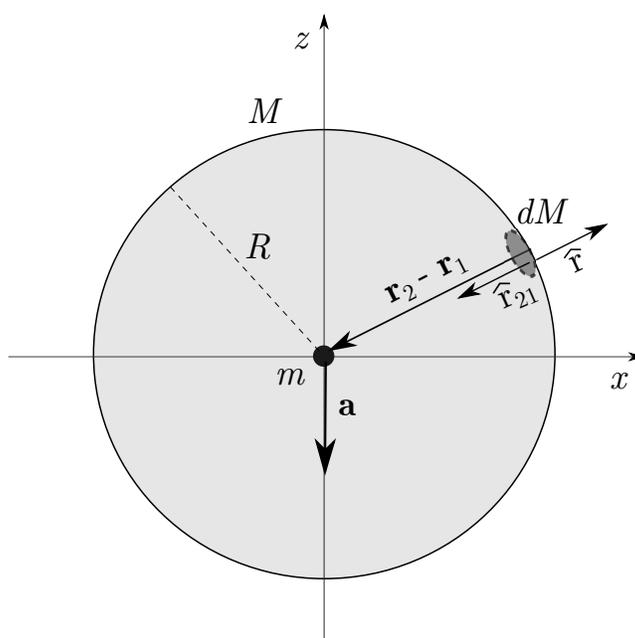


Figura 1: Casca esférica de raio R e massa gravitacional M , em repouso, interagindo com um corpúsculo de massa m , inicialmente parado no centro da casca, com uma aceleração tangencial ao longo da direção do eixo z , isto é $\vec{a} = -a\hat{k}$. Note que, no instante $t = 0$, temos $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \equiv r = R$.

REFERÊNCIAS

- [1] I. Newton. *Principia – Princípios Matemáticos de Filosofia Natural. Livro I: O Movimento dos Corpos*. São Paulo: Nova Stella/Edusp, 1990. [Tradução de T. Ricci, L. G. Brunet, S. T. Gehring e M. H. C. Célia]
- [2] I. Newton. *Principia – Princípios Matemáticos de Filosofia Natural. Livro II: O Movimento dos Corpos (em Meios com Resistência) e Livro III: O Sistema do Mundo (tratado matematicamente)*. São Paulo: Edusp, 2008. [Tradução de A. K. T. Assis]
- [3] A. Einstein, *Preussische Akad. der Wissenschaften, Sitzungsberichte* (part 2), 778 (1915). Veradendo na pág. 801.
- [4] A. Einstein, *Annalen der Physik* **49**, 769 (1916).
- [5] H. Thirring, *Physikalische Zeitschrift* **19**, 33 (1918).
- [6] H. Thirring, *Physikalische Zeitschrift* **22**, 29 (1921).
- [7] A. K. T. Assis. *Mecânica Relacional e implementação do princípio de Mach com a força de Weber Gravitacional*. Montreal, Canada: Apeiron, 2013.
- [8] A. K. T. Assis, *Found. Phys. Lett.* **2**, 301 (1989).

- [9] A. K. T. Assis. *Eletrodinâmica de Weber*. Campinas, São Paulo: Ed. Unicamp, 1995.
- [10] A. K. T. Assis, *J. Phys. Soc. Japan* **62**, 1418 (1993).
- [11] V. F. Mikhailov, *Ann. Fond. Louis de Broglie* **24**, 161 (1999).
- [12] V. F. Mikhailov, *Ann. Fond. Louis de Broglie* **26**, 33 (2001).
- [13] E. Mach. *The science of mechanics*, 6^a Ed. La Salle: Open Court, 1960.
- [14] J. B. Barbour. *Absolute or relative motion?*, Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
- [15] D. W. Sciama, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **113**, 34 (1953).
- [16] M. Reinhardt, *Zeit. Naturforschung A* **28**, 529 (1973).
- [17] D. J. Raine, *Rep. Progress Phys.* **44**, 1151 (1981).
- [18] A. Pais. *Subtle is the Lord....* Oxford: Oxford University Press, 1982.
- [19] M. Ghins. *A inércia e o espaço-tempo absoluto*. Campinas, São Paulo: Coleção CLE-Unicamp, 1991.
- [20] M. Ghins. *A equivalência dinâmica segundo Mach e a teoria geral da relatividade*. Em: F. R. R. Évora (editor), *Século XIX: o nascimento da ciência contemporânea*, pp. 161–175. Campinas, São Paulo: Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da Unicamp, 1992.