

# Fundamentos de Mecânica Quântica: derivação da equação de Schrödinger para sistemas dissipativos

L.A. Gonçalves e L.S.F. Olavo  
Instituto de Física, Univesidade of Brasília,  
Distrito Federal, DF, Brasil

07 de Janeiro de 2017

## Resumo

*O estudo de sistema dissipativos é ainda uma área pouco desenvolvida dentro da Mecânica Quântica. A dificuldade surge do fato desta ser fortemente conectada ao formalismo Hamiltoniano da Mecânica Clássica. Este trabalho tem como foco obter a equação de Schrödinger sem fazer uso do formalismo Hamiltoniano, permitindo assim a descrição de sistemas mais gerais, incluindo aqueles dissipativos. Para tanto, fazemos a generalização de um método que seguramente fornece a equação de Schrödinger para os sistemas Hamiltonianos já conhecidos.*

Palavras-chave: Sistemas Dissipativos, Equação de Schroedinger, Mecânica Quântica.

## I. INTRODUÇÃO

O estudo de dissipação dentro da Mecânica Quântica possui hoje um longo histórico [1],[2]. As diferentes abordagens podem ser separadas em dois grupos:

- A tentativa direta de se quantizar sistemas abertos sujeitos a uma força dependente da velocidade do tipo  $k\dot{q}$ [1].
- Associar o problema de dissipação a um sistema isolado, composto por dois subsistemas, com um absorvendo energia do outro graças ao seu elevado número de estados possíveis[2].

A primeira abordagem, até aqui, tem esbarrado na impossibilidade de se descrever o equivalente clássico do sistema utilizando o formalismo Hamiltoniano usual, de forma que os métodos tradicionais de quantização pudessem ser utilizados. Para superar essa barreira, foram propostas extensões do formalismo Hamiltoniano para que esse pudesse também comportar dissipação[3], de forma que os sistemas quântico e clássico pudessem ser conectados através dessa extensão.

Devido a essas dificuldades, as abordagens que assumiam um sistema isolado, com um dos subsistemas atuando como um reservatório de energia[4], obtiveram mais sucesso. No entanto, essa estratégia ainda sofre críticas daqueles adeptos da abor-

dagem direta, uma vez que a constituição concreta do reservatório deve ser levada em conta, o que é indesejável<sup>1</sup>.

Uma possível solução, que será apresentada neste trabalho, é representar o sistema clássico sem fazer uso do formalismo Hamiltoniano e a partir daí obter a equação de Schrödinger que descreve o sistema quântico em questão. Isso, entretanto, implica em se desenvolver um *método de quantização* que seja independente do formalismo Hamiltoniano.

Para tal, partimos da equação de Liouville e, assumindo a validade de outras duas equações, chegamos à equação de Schrödinger. De fato, podemos tomar a validade dessas equações como axiomas do método. Vale ressaltar que é possível estender o método para qualquer sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais[5], fazendo pequenos ajustes nos axiomas. É possível fazer o mesmo para os postulados da Relatividade Restrita, obtendo as equações de Klein-Gordon e Dirac de segunda ordem[6].

No entanto, esses resultados são válidos para sistemas Hamiltonianos. Assim, para que possamos utilizar o método englobando também sistemas com dissipação, é necessário generalizar os axiomas, para que então seja possível estender o método desenvolvido anteriormente.

Começaremos mostrando o método para sistemas Hamiltonianos, e apresentamos, em seguida, como uma aplicação, a dedução da equação de Schrödinger para o campo eletromagnético – isso dará ao leitor confiança na adequação do método de quantização em contextos Hamiltonianos usuais.

Em seguida, fazemos a generalização da equação de Liouville, para então aplicar o método em sistemas com dissipação.

Ao final apresentamos nossas considerações fi-

nais.

## II. APLICAÇÃO EM SISTEMAS HAMILTONIANOS

### I. Potencial dependente da posição

Começamos com a análise do caso usual de um sistema de uma partícula em movimento unidimensional, com Hamiltoniana dada por:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (1)$$

Com esse Hamiltoniano, podemos escrever os axiomas da seguinte forma:

**Axioma 1:** A equação de Liouville

$$\frac{dF(q, p, t)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q} \frac{p}{m} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial V}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

é válida;

**Axioma 2:** Definimos a função característica, relacionada à densidade de probabilidade conjunta no espaço de fase, da forma usual como sendo

$$Z(q, \delta q, t) = \int F(q, p, t) e^{\frac{i}{\hbar} p \delta q} dp \quad (3)$$

de maneira que

**Axioma 3:** O *ansatz*

<sup>1</sup>De modo geral, quando consideramos fenômenos dissipativos, estamos interessados em abstrair os mecanismos particulares e específicos que levam à dissipação, ou seja, construímos uma teoria de resposta linear do tipo  $f_{at} = -k\dot{q}$ , e incluímos nossa "ignorância" desses mecanismos particulares na constante  $k$ . Isso é feito usualmente no âmbito da Física Clássica e é uma forma interessante de se abordar a questão também no âmbito quântico, uma vez que implica em maior generalidade de aplicação.

$$Z(q, \delta q, t) = \Psi^*(q - \frac{\delta q}{2}, t) \Psi(q + \frac{\delta q}{2}, t) \quad (4)$$

é válido se expandirmos  $Z(q, \delta q, t)$  até segunda ordem em  $\delta q$ .

Vale notar que em (2) utilizamos as equações de movimento. Aplicando (3) a (2), obtemos:

- Primeiro termo:

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial F}{\partial q} \frac{p}{m} e^{\frac{i}{\hbar} p \delta q} dp &= \frac{\partial}{\partial q} \int F \frac{p}{m} e^{\frac{i}{\hbar} p \delta q} dp = \\ &= \frac{-i\hbar}{m} \frac{\partial^2}{\partial q \partial (\delta q)} \int F e^{\frac{i}{\hbar} p \delta q} dp = \frac{-i\hbar}{m} \frac{\partial^2 Z(q, \delta q, t)}{\partial q \partial (\delta q)} \end{aligned}$$

- Segundo:

$$-\frac{\partial V}{\partial q} \int \frac{\partial F}{\partial p} e^{\frac{i}{\hbar} p \delta q} dp = \frac{i}{\hbar} \delta q \frac{\partial V}{\partial q} Z(q, \delta q, t)$$

- E, finalmente, o terceiro:

$$\int \frac{\partial F}{\partial t} e^{\frac{i}{\hbar} p \delta q} dp = \frac{\partial}{\partial t} \int F e^{\frac{i}{\hbar} p \delta q} dp = \frac{\partial Z(q, \delta q, t)}{\partial t} \quad (5)$$

Juntando todos os termos e multiplicando tudo por  $i\hbar$ , ficamos com

$$\frac{-\hbar^2}{m} \frac{\partial^2 Z}{\partial q \partial (\delta q)} + \delta q \frac{\partial V}{\partial q} Z = i\hbar \frac{\partial Z}{\partial t} \quad (6)$$

Se escrevermos  $\Psi(q, t)$  em sua forma polar, dada por  $\Psi(q, t) = R(q, t) \exp(\frac{i}{\hbar} S(q, t))$ , com  $R(q, t)$  e  $S(q, t)$  funções reais e expandirmos (4) até segunda ordem em  $\delta q$ , obtemos:

$$\begin{aligned} Z(q, \delta q, t) &= \left\{ R^2(q, t) + \left(\frac{\delta q}{2}\right)^2 \times \right. \\ &\left. \left[ R(q, t) \frac{\partial^2 R}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial R}{\partial q}\right)^2 \right] \right\} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{\partial S}{\partial q}\right) \quad (7) \end{aligned}$$

Substituindo (7) em (6) obtemos, supondo que  $\delta q$  é uma variação infinitesimal

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial q} \left( R^2 \frac{\partial S}{\partial q} \right) = 0 \quad (8)$$

e

$$\begin{aligned} R^2 \delta q \frac{\partial}{\partial q} \left[ \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 \right. \\ \left. - \frac{\hbar^2}{2mR(q, t)} \frac{\partial^2 R}{\partial q^2} + V(q) \right] = 0 \quad (9) \end{aligned}$$

que são, respectivamente, os termos de ordem zero e ordem um em  $\delta q$  (que coincidem com suas partes imaginária e real).

Por outro lado, se tomarmos a equação de Schrödinger

$$\left( \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q) \right) \Psi(q, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(q, t)}{\partial t} \quad (10)$$

e escrevermos  $\Psi(q, t)$  novamente em sua forma polar, é simples ver que ela é equivalente a (8) e (9), quando tomamos as partes real e imaginária da equação resultante nas funções  $R(x, t)$  e  $S(x, t)$ .

Com isso, mostramos a validade do método para sistemas com potenciais que dependem apenas da posição. É interessante agora vermos que ele também se aplica a potenciais dependentes da velocidade, mas que ainda mantém a estrutura Hamiltoniana.

## II. Potencial dependente da velocidade

Existe um classe de potenciais dependentes da velocidades que preservam a forma das equações de Lagrange. Esse potencial é a função  $U(q, \dot{q}, t)$  tal que a força generalizada da  $j$ -ésima coordenada pode ser escrita como[7]:

$$Q_j = -\frac{\partial U(q, \dot{q}, t)}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (11)$$

Assim, podemos definir a *Lagrangeana* da forma usual e a partir daí obter a *Hamiltoniana* correspondente e suas equações de movimento.

Um importante caso de potencial com a mencionada forma é o campo eletromagnético, uma vez que força de Lorentz é dada por:

$$F = e \left[ \vec{E} + \left( \vec{v} \times \vec{B} \right) \right]$$

e os campos elétrico e magnético podem ser escritos como:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

onde  $\phi$  é o potencial escalar e  $\vec{A}$  é o potencial vetor. Dessa forma, escrevendo:

$$U(q, \dot{q}, t) = e\phi(\vec{q}) - e\vec{A}(q, t) \cdot \dot{\vec{q}}$$

recuperamos a força de Lorentz.

Com este potencial, temos a seguinte *Lagrangeana*:

$$\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \sum_{j=1}^3 \frac{m\dot{q}_j^2}{2} - e(\phi - A_j \dot{q}_j)$$

que gera a *Hamiltoniana*:

$$H(\vec{q}, \vec{p}) = \sum_{j=1}^3 \frac{(p_j - eA_j)^2}{2m} + e\phi$$

de modo que a equação de Liouville deve ser escrita agora como

$$\frac{dF(q, p, t)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{(p_j - eA_j)}{m} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \left[ \frac{e}{m} \frac{\partial A_k}{\partial q_j} (eA_k - p_k) + e \frac{\partial \phi}{\partial q_j} \right] + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (12)$$

onde passamos a usar a convenção de Einstein de somatórios. Uma vez que passamos a três dimensões, devemos também redefinir a função característica pela expressão

$$Z(\vec{q}, \vec{p}, t) = \int F(\vec{q}, \vec{p}, t) e^{i\hbar p_j \delta q_j} d^3 p \quad (13)$$

Aplicando (13) a (12) de modo análogo ao que fizemos na seção anterior, obtemos

$$i\hbar \frac{\partial Z}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial^2 Z}{\partial x_j \partial (\delta x_j)} + i\hbar \frac{eA_j}{m} \frac{\partial Z}{\partial x_j} + \frac{e^2}{m} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} A_k \delta x_j Z + i\hbar \frac{e}{m} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \delta x_j \frac{\partial Z}{\partial (\delta x_k)} + e \delta x_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} Z \quad (14)$$

Se escrevermos  $\Psi(\vec{q}, t)$  novamente em sua forma polar e expandindo até segunda ordem, a função característica fica

$$Z(x, \delta x; t) = \left[ R^2 + \frac{\delta x_k \delta x_l}{4} \left( R \frac{\partial^2 R}{\partial x_k \partial x_l} - \frac{\partial R}{\partial x_k} \frac{\partial R}{\partial x_l} \right) \right] e^{i\hbar \delta x_k \frac{\partial S}{\partial x_k}}, \quad (15)$$

e sua substituição na última expressão em (14) fornece as equações

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \frac{1}{m} \left( \nabla S - e\vec{A} \right) R^2 \right] = 0,$$

e

$$R^2 \delta x_j \nabla \cdot \left\{ \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla S)^2 - \frac{\hbar^2}{2mR} \nabla^2 R - \frac{e}{m} \vec{A} \cdot \nabla S + \frac{e^2}{2m} \vec{A}^2 + e\phi \right\} = 0. \quad (16)$$

Essas duas últimas equações são equivalentes a

$$\left[ \frac{1}{2m} \left( -i\hbar \nabla - e\vec{A} \right)^2 + \phi(\vec{q}) \right] \Psi(\vec{q}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{q}, t)}{\partial t} \quad (17)$$

se escrevermos  $\Psi(\vec{q}, t) = R(\vec{q}, t) e^{iS(\vec{q}, t)/\hbar}$  e substituirmos essa expressão na equação anterior, tomando, ao final, as partes real e imaginária.

### III. EXTENSÃO PARA SISTEMAS NÃO HAMILTONIANOS

O primeiro passo para a extensão do nosso método é fazer a generalização da equação de Liouville sem qualquer menção a uma eventual forma Hamiltoniana[8]. Para tal, considere um elemento infinitesimal de volume no espaço de fases localizado em um ponto  $(\vec{q}, \vec{p})$ . Então podemos definir uma função de distribuição  $F(\vec{q}, \vec{p}, t)$  que dá o número de partículas  $\delta N$  com posições e momenta contidos no intervalo  $[(\vec{q}, \vec{p}), (\vec{q} + \delta\vec{q}, \vec{p} + \delta\vec{p})]$  em um tempo  $t$ , ou seja,

$$\delta N = F(\vec{q}, \vec{p}, t) \delta\vec{q} \delta\vec{p}.$$

Como número total de partículas do conjunto é fixo, podemos normalizar a função de distribuição, integrando sobre todo o espaço para escrever

$$\int F(\vec{q}, \vec{p}, t) \delta\vec{q} \delta\vec{p} = 1.$$

Em geral, o número de sistemas entrando uma face do elemento de volume será diferente daquele saindo pela face oposta. Para as faces perpendiculares ao eixo  $q_1$ , localizadas em  $q_1$  e  $q_1 + \delta q$ , temos que

$$F(q_1, \dots) \dot{q}_1(q_1, \dots) \delta q_2 \dots \delta q_{3m} \delta \vec{p}$$

representa o número de sistemas passando pela primeira face. Já,

$$\begin{aligned} & F(q_1 + \delta q_1, \dots) \dot{q}_1(q_1 + \delta q_1, \dots) \times \\ & \quad \delta q_2 \dots \delta q_{3m} \delta \vec{p} \\ & \approx \left( F(q_1, \dots) + \frac{\partial F}{\partial q_1} \delta q_1 \right) \left( \dot{q}_1(q_1, \dots) + \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_1} \delta q_1 \right) \times \\ & \quad \delta q_2 \dots \delta q_{3m} \delta \vec{p} \end{aligned} \quad (18)$$

representa o número de sistemas passando pela segunda face. Portanto, a variação do número de

sistemas passando pelo elemento de volume, relativas ao eixo  $q_1$ , é representada simplesmente por

$$\frac{d}{dt} (\delta N)_{q_1} = - \left( \frac{\partial F}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_1} F \right) \delta\vec{q} \delta\vec{p}.$$

Se somarmos as contribuições de todos os eixos, temos a variação total de sistemas dentro do elemento de volume

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta N = & - \sum_{j=1}^m \left[ F \left( \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_j} + \frac{\partial \dot{p}_j}{\partial p_j} \right) + \right. \\ & \left. + \dot{q}_j \frac{\partial F}{\partial q_j} + \dot{p}_j \frac{\partial F}{\partial p_j} \right] \delta\vec{q} \delta\vec{p}, \end{aligned} \quad (19)$$

e a derivada temporal da função de distribuição pode ser obtida como:

$$\frac{1}{\delta\vec{q} \delta\vec{p}} \frac{d}{dt} \delta N = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\delta N}{\delta\vec{q} \delta\vec{p}} \right) = \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Assim, uma vez que

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{j=1}^m \left( \dot{q}_j \frac{\partial F}{\partial q_j} + \dot{p}_j \frac{\partial F}{\partial p_j} \right) + \frac{\partial F}{\partial t},$$

temos a equação

$$\frac{dF(\vec{q}, \vec{p}, t)}{dt} = -\Lambda(\vec{q}, \vec{p}, t) F(\vec{q}, \vec{p}, t), \quad (20)$$

onde o fator  $\Lambda(\vec{q}, \vec{p}, t)$ , chamado *fator de compressão*, é definido como

$$\Lambda(\vec{q}, \vec{p}; t) = \nabla_q \cdot \vec{q} + \nabla_p \cdot \vec{p}.$$

A demonstração dessa equação não faz uso, em nenhum momento, das equações de movimento e, portanto, não exige a existência de um Hamiltoniano para ser válida, o que era nosso objetivo.

Vale notar que uma condição suficiente para que o fator de compressão seja nulo é que exista um Hamiltoniano, uma vez que, neste caso,

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} ; \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j},$$

reduzindo o resultado (20) à equação de Liouville usual (2).

Consideremos agora um sistema de uma partícula, sujeita à força

$$f(q, \dot{q}; t) = -\frac{\partial V(q)}{\partial q} + k\dot{q}.$$

Para este sistema as equações de movimento são

$$\dot{p} = -\frac{\partial V(q)}{\partial q} + k\dot{q}; \quad \dot{x} = \frac{p}{m}, \quad (21)$$

e o fator de compressão é dado por:

$$\Lambda(\vec{q}, \vec{p}; t) = \frac{k}{m}.$$

Dessa forma, escrevemos a equação de Liouville generalizada como:

$$\frac{dF(q, p, t)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial F}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{k}{m} F$$

ou, utilizando (21):

$$\frac{\partial F}{\partial q} \frac{p}{m} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial V(q)}{\partial q} + \frac{k}{m} \frac{\partial(pF)}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (22)$$

Ainda não estamos prontos para aplicar o método, pois uma nova modificação nos axiomas deve ser feita, desta vez em (3).

Sabemos que, classicamente, o elemento de volume no espaço de fases tem a possibilidade de se expandir ou se contrair. Já na Mecânica Quântica, o elemento de volume fundamental é dado pela relação

$$\Delta x \Delta p \sim \hbar,$$

que pode ser mostrada diretamente por meio do *ansatz*. Como (4) não depende da velocidade, podemos mantê-lo como está. No entanto, devido à possibilidade de expansão ou contração do volume fundamental, fazemos a seguinte modificação

$$\hbar \rightarrow \hbar e^{kt/m}, \quad (23)$$

e

$$\Delta x \Delta p \sim \hbar e^{kt/m},$$

de forma que a função característica passa a ser escrita como

$$Z(q, \delta q, t) = \int F(q, p, t) e^{\frac{ip\delta q}{\hbar e^{kt/m}}} dp. \quad (24)$$

Aplicando (24) a (22), temos:

• Primeiro termo:

$$\begin{aligned} & \int \frac{\partial F}{\partial q} \frac{p}{m} e^{\frac{ip\delta q}{\hbar e^{kt/m}}} dp = \\ & = \frac{-i\hbar e^{kt/m}}{m} \frac{\partial^2}{\partial q \partial(\delta q)} \int F e^{\frac{ip\delta q}{\hbar e^{kt/m}}} dp \\ & = \frac{-i\hbar e^{kt/m}}{m} \frac{\partial^2 Z(q, \delta q, t)}{\partial q \partial(\delta q)} \end{aligned} \quad (25)$$

• Segundo termo:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial V(q)}{\partial q} \int \frac{\partial F}{\partial p} e^{\frac{ip\delta q}{\hbar e^{kt/m}}} dp = \\ & = \frac{i\delta q}{m\hbar e^{kt/m}} \frac{\partial V(q)}{\partial q} Z(q, \delta q, t) \end{aligned} \quad (26)$$

• Terceiro termo:

$$\begin{aligned} & \frac{k}{m} \int \frac{\partial(pF)}{\partial p} e^{\frac{ip\delta q}{\hbar e^{kt/m}}} dp = \\ & = -\frac{k}{m} \frac{i\delta q}{\hbar e^{kt/m}} \int pF e^{\frac{ip\delta q}{\hbar e^{kt/m}}} dp ; \\ & = -\frac{k}{m} \delta q \frac{\partial Z(q, \delta q, t)}{\partial(\delta q)} \end{aligned} \quad (27)$$

• Quarto termo:

## IV. CONCLUSÃO

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{\partial F}{\partial t} e^{\frac{ip\delta q}{\hbar e^{kt/m}}} dp = \\
 & = \frac{\partial}{\partial t} \int F e^{\frac{ip\delta q}{\hbar e^{kt/m}}} dp + \frac{k}{m} \frac{i\delta q}{\hbar e^{kt/m}} \int p F e^{\frac{ip\delta q}{\hbar e^{kt/m}}} dp . \\
 & = \frac{\partial Z(q, \delta q, t)}{\partial t} + \frac{k}{m} \delta q \frac{\partial Z(q, \delta q, t)}{\partial (\delta q)}
 \end{aligned} \quad (28)$$

Multiplicando tudo por  $i\hbar e^{kt/m}$ , e agrupando os termos, ficamos com a equação

$$\begin{aligned}
 i\hbar e^{kt/m} \frac{\partial Z(q, \delta q, t)}{\partial t} & = \frac{-\hbar^2 e^{2kt/m}}{m} \frac{\partial^2 Z(q, \delta q, t)}{\partial q \partial (\delta q)} \\
 & + \frac{\delta q}{m} \frac{\partial V(q)}{\partial q} Z(q, \delta q, t)
 \end{aligned} \quad (29)$$

Se utilizarmos novamente (7), ficamos com duas equações, exatamente como antes, mas agora dadas por

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} e^{kt/m} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial q} \left( e^{2kt/m} R^2 \frac{\partial S}{\partial q} \right) = 0, \quad (30)$$

e

$$\begin{aligned}
 R^2 \delta q \frac{\partial}{\partial q} \left[ \frac{\partial S}{\partial t} e^{kt/m} + \frac{e^{2kt/m}}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 - \right. \\
 \left. \frac{e^{2kt/m} \hbar^2}{2mR(q,t)} \frac{\partial^2 R}{\partial q^2} + V(q) \right] = 0
 \end{aligned} \quad (31)$$

Se escrevermos

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{-\hbar^2 e^{2kt/m}}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q) \right) \Psi(q, t) & = \\
 = i\hbar e^{kt/m} \frac{\partial \Psi(q, t)}{\partial t},
 \end{aligned} \quad (32)$$

e fizermos como anteriormente, obtemos também (30) e (31). Analisando (32) é perceptível que a equação é simplesmente a equação de Schrödinger já conhecida com uma "nova constante de Planck" como em (23). Fica claro também que quando  $k = 0$  recuperamos a equação de Schrödinger comum.

Apresentamos aqui um método que nos permite derivar a equação de Schrödinger de forma sólida e sistemática e que pode ser facilmente estendido para sistemas em que há introdução ou remoção de energia. Em particular, é possível encontrar a equação de Schrödinger para um sistema com resposta linear do tipo  $k\dot{q}$ , esta sendo a maneira tradicional de se estudar sistemas que recebem ou perdem energia em Mecânica Clássica.

No entanto, há ainda a necessidade de se analisar casos mais gerais como, por exemplo, quando  $k$  deixa de ser uma constante e passa a depender da posição ou do tempo, sendo estes comportamentos mais aceitáveis fisicamente, uma vez que não se espera uma situação na qual o elemento dissipativo remova *toda* a energia do sistema quântico subjacente.

Tais generalizações estão sendo presentemente desenvolvidas pelos autores.

## REFERÊNCIAS

- [1] E. Kanai, Progr. Theoret. Phys 3, 440 (1948). W. E. Brittin, Phys. Rev. 77, 396 (1950). V. W. Myers, Am. J. Phys. 27, 507 (1950). E. H. Kerner, Can. J. Phys. 36, 371 (1958). W. K. H. Stevens, Proc. Phys. Soc. 72, 1027 (1958)
- [2] H. B. Callen, and T. A. Welton, Phys. Rev. 83, 34 (1951). Weber, J., Phys. Rev. 90, 977 (1953), Senitzky, I. R., Phys. Rev. 119, 670 (1960). R. P. Feynman, and F. L. Vernon, Annals of Physics 24: 1208 (1963). doi:10.1016/00034916(63)90068-x
- [3] H. Dekker, Z. Physik B 21, 295 (1975)
- [4] A. O. Caldeira, A. H. Castro Neto, and T. Oliveira de Carvalho, Phys. Rev. B 48, 13974 (1993). A. O. Caldeira, and A. J. Leggett,

- Physica 121A: 587 (1983a). doi:10.1016/0378-4371(83)90013-4. A. O. Caldeira, and A. J. Leggett, *Annals of Physics* 149, 374 (1983b). doi:10.1016/00034916(83)90202-6. A. J. Leggett, *Physical Review B* 30, 1208 (1984). M. Rosenau da Costa, A. O. Caldeira, S. M. Dutra, and H. Westfahl Jr., *Physical Review A* 61: 2210 (2000). doi:10.1103/physreva.61.022107
- [5] L.S.F. Olavo, *Quantum Mechanics: principles, new perspectives, extension and interpretation*, Nova Science Publishers, Inc. (2014)
- [6] L.S.F. Olavo, *Foundations of Quantum Mechanics: Special and General Relativistic Extensions in Contemporary Research in Quantum Systems*, Zoheir Ezziane, Ed. Nova Science Publishers, Inc. (2014)
- [7] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical mechanics*, Addison Wesley; 3rd edition (2001) pp 22-24
- [8] D. J. Evans and G. P. Morriss, *Statistical mechanics of nonequilibrium liquids*, ANU E Press, Canberra; 2nd edition (2007) pp. 43-46