DOI: https://doi.org/10.26512/rfmc.v8i1.34088

La Géométrie est plus que ses Axiomes: Philosophie de l'Espace et Ontogénèse de la Nature

[A Geometria é mais do que seus Axiomas: Filosofia do Espaço e Ontogenia da Natureza]

Luciano Boi*

Résumé: Les théories mathématiques cherchant à comprendre les structures géométriques et topologiques du monde naturel et de celui de la perception, ainsi que les relations qui se tissent entre eux, sont ouvertes et incomplètes. Le champ conceptuel de la géométrie ne peut pas être réduit à un système fini d'axiomes. D'abord, la recherche de la signification des concepts mathématiques ne s'identifie pas à la logique de leur démonstration; et la vérité des propositions doit aussi être distinguée de leur démonstration (cf. les exemples de mathématiques et de physiques non dénombrables). Ensuite, on peut associer à la géométrie (ou à d'autres domaines des mathématiques) un certain pouvoir morphogénétique, donc ontogénétique - cf. l'exemple des symétries et celui des formes naturelles, et les repliements/entrelacements dans le monde vivant. La géométrie est un 'langage' pluridimensionnel et polysémique: langage de l'imagination et de l'invention de concepts, et aussi de la nature et du vivant. Les concepts de groupe et de nœud sont transversaux: ils recoupent les différentes dimensions et significations de ce qu'est la géométrie.
Mots Clés: Philosophie de l'espace. Ontogenèse. Formes naturelles. Symetries. Limites de l'axiomatique. Topologie du vivant. Géométrie et sciences humaines.

Resumo: As teorias matemáticas que buscam entender as estruturas geométricas e topológicas do mundo natural e da percepção, bem como as relações que se estabelecem entre elas, são abertas e incompletas. O campo conceitual da geometria não pode ser reduzido a um sistema finito de axiomas. Primeiramente, a investigação do significado dos conceitos matemáticos não se identifica à lógica da demonstração deles; também a verdade das proposições deve ser separada da demonstração delas (cf. os exemplos da matemática e da física não contáveis). Segundamente, se pode associar à geometria (como também a outros domínios da matemática) um certo poder morfogenético, então ontogenético – cf. os exemplos das simetrias e das formas naturais, e aquele das dobras e entrelaçamentos no mundo dos vivos. A geometria pode ser concebida como uma 'linguagem' pluridimensional e polissêmica: como linguagem da imaginação e da invenção de conceitos, e também linguagem da natureza e dos seres vivos. Os conceitos de grupo e de nó são transversais, no sentido que correspondem às diferentes dimensões e significados do que é geometria.
Palavras-chave: Filosofia do espaço. Ontogenia. Formas naturais. Simetrias. Limites do axiomático. Topologia de coisas vivas. Geometria e ciências humanas.

*Professeur de Géométrie, Théorisation Scientifique et Philosophie Naturelle à l'Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales (Paris), Centre de Mathématiques (CAMS) et Programme de Philosophie et Epistémologie. E-mail: lboi@ehess.fr. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7238-4320.

(cc) BY-NC-ND

1. Non dénombrabilité en mathématiques et en physique

L'une des questions fondamentales qui a occupé le débat sur la nature des notions mathématiques a concerné la possibilité ou l'impossibilité de leur axiomatisation et/ou formalisation. Plusieurs programmes d'axiomatisation des mathématiques, ou d'un de ses domaines fondamentaux, ont été proposés depuis notamment le début du XIXe siècle, dont les plus ambitieux (et connus) ont sans doute été ceux de Hilbert au début du siècle dernier, qui a cherché à axiomatiser d'abord la géométrie euclidienne puis la relativité generale, et du groupe Bourbaki, qui a poursuivi le vaste et ambitieux programme de réécrire et refonder tous les domaines des mathématiques en les reformulant sous la forme de pures *structures algébriques*, et en les épurant ainsi de tout élément intuitif (vague et mal défini) et de tout lien à la réalité physique d'un côté, et à l'intuition de l'autre.

Nos considérations ici concerneront surtout le domaine de la géométrie et, à ce propos, la principale thèse que nous soutiendrons est que ce qu'une géométrie donnée peut produire, en des termes conceptuels et empiriques, est infiniment plus riche et plus profond que ce qui est contenu dans ses axiomes. Cela doit être compris de deux manières, toutes les deux très précises. En premier lieu, on peut faire explicitement référence au célèbre théorème d'incomplétude de Gödel, ce qui permet de mettre en évidence d'abord que l'univers des objets mathématiques, qui ne doit point être limité aux variétés arithmétiques, n'est pas épuisable par les axiomes d'un système formel. On pourra toujours découvrir de nouvelles propriétés de ces objets qui n'étaient pas contenues ni pensables à l'intérieur du système d'axiomes connu et accepté à un moment donné du développement de la science. Ensuite, on peut souligner un autre aspect important de cette question, qui est que l'ensemble de toutes les propriétés des nombres entiers (c'est-à-dire l'ensemble de toutes les assertions vraies concernant ces nombres) n'est pas une base finie; elle n'est donc pas récursive. En particulier, cela veut dire qu'il n'existe pas d'algorithme permettant d'engendrer tous les éléments complémentaires qui n'appartiennent pas à un ensemble (de nombres naturels) donné. En effet, il existe des ensembles qui sont récursivement énumérables, mais pas récursifs, et il existe aussi d'autres ensembles (de propositions vraies) qui ne sont même pas récursivement énumérables. Les mathématiques et la physique abondent d'exemples, de problèmes et des théorèmes qui ne sont pas récursifs, et surtout dont la signification n'est pas épuisable par aucun système fini d'axiomes.

ISSN: 2317-9570

2. Pavages et «quasi cristaux»

Un exemple frappant de mathématique non dénombrable est celui des pavages de Roger Penrose. On peut paver le plan à l'aide de deux petits motifs (qui sont des triangles de formes différentes liés au nombre d'or) d'une infinité de manières qui sont non congruentes, c'est-à-dire non isométriques les unes avec les autres. En effet, il est impossible de choisir dans chaque classe de pavages un représentant et un seul. En d'autres termes, le problème général de savoir s'il est possible de paver le plan avec ces motifs n'est pas récursivement décidable. Il existe aussi des phénomènes physiques, en particulier en mécanique quantique, qui impliquent des questions mathématiques non décidables de manière récursive. C'est que l'indécidabilité signifie, est qu'il existe un système de motifs, en nombre fini, permettant de paver le plan, mais pas de manière périodique. Le fait essentiel c'est que la règle de construction du pavage n'est pas du tout locale, elle doit constamment se référer à un plan global en quelque sorte donné *a priori*.

L'autre aspect fondamental, c'est que l'on a découvert ces pavages non périodiques dans la nature. Ils apparaissent dans ce qu'on appelle les «quasi-cristaux», dont la théorie mathématique n'a été développée qu'à une époque relativement récente. Ils rendent possible la symétrie pentagonale qui est interdite en cristallographie car celle-ci se limite aux configurations périodiques. Comme pour construire mathématiquement les structures quasi-périodiques il faut utiliser des procédés non locaux, on a là un magnifique contre-exemple à une bonne part de la physique, dont la nature est essentiellement locale. Il n'est donc pas impossible, comme notamment David Bohm, Roger Penrose et Alain Connes l'ont écrit, que le quantique nous conduise à reculer les limites que nous rencontrons actuellement en logique, qu'il nous oblige à accepter des lois physiques qui ne spécifient pas le résultat de manière récursive. Par ailleurs, d'autres surprises tout à fait étonnantes proviennent plutôt de la physique macroscopique et mésoscopique, notamment du chaos dynamique.

Rappelons un dernier aspect important. L'étude des cristaux et des quasi-cristaux montre bien que la structure mathématique, constituée ici par la donnée d'un groupe de l'espace euclidien à trois dimensions ou d'un sous-groupe discret de $E3$ qui contient trois translations indépendantes, fait agir sur l'espace en question, engendre des formes naturelles nouvelles. Plus précisément, un tel groupe (ou sous-groupe), appliqué à un certain motif fondamental de l'objet cristal, engendre une forme tridimensionnelle qui résulte d'un type particulier d'arrangement des molécules dans un cristal, et qui peut être étendue à tout l'espace. On a alors ce qu'on appelle un

(cc) BY-NC-ND

pavage du plan ou de l'espace par la répétition du même motif, qui peut être périodique, quasi-périodique et apériodique, en accord avec des règles très précises. La cristallographie mathématique est une excellente illustration de la manière dont les propriétés de l'espace euclidien tridimensionnel contiennent les possibilités d'engendrer les morphologies caractéristiques des objets.

3. Symétries et formes naturelles

Le concept de symétrie joue un rôle capital dans un tel engendrement, et également dans la transition d'un type de formes à un autre lorsqu'on élargit le groupe euclidien à d'autres types de symétries. On peut engendrer la forme caractéristique de certaines classes d'objets naturels par une application répétée d'une transformation infinitésimale par similitude à un espace courbe; cette transformation constitue alors la forme de l'objet. La transformation par similitude la plus générale dans le plan euclidien, est la similitude de type *spirale*, qui est une combinaison d'une rotation et d'une dilatation avec le même centre. Une telle transformation, et son inverse, engendrent un sous- groupe de dimension 1 du groupe des similitudes. Il en résulte un système de points réguliers associés à ce sous-groupe. Il existe une unique spirale logarithmique et équiangulaire qui contient tous les points du système. En botanique, on l'appelle *spirale ontogénétique*. On sait d'ailleurs que les surfaces minimales ou les singularités (par exemple, de la théorie des catastrophes) sont des générateurs de formes naturelles, aussi bien dans le monde organique que dans celui inorganique. L'ensemble de ces possibilités définissent ce qu'on peut appeler une *sémantique des formes*.

Or, de notre point de vue, une sémantique des formes comporte toujours une structure formelle de nature mathématique qui, faite agir sur un certain espace substrat, est capable d'engendrer une ou plus famille(s) d'objets qualitativement différents et doués d'un certain nombre de propriétés caractéristiques.

On voit bien, par les exemples que l'on vient de citer, que ces objets géométriques et concrets nouveaux que sont les quasi-cristaux n'auraient pas pu être découverts si l'on était resté confiné à l'intérieur du système d'axiomes de la cristallographie classique.

On se trouve dans une situation analogue, c'est-à-dire dans l'impossibilité de calculer effectivement le résultat prédit par une loi physique en fonction des conditions initiales, lorsque la sensibilité aux conditions initiales croît de façon exponentielle comme dans les systèmes chaotiques (sorte de systèmes dynamiques aux propriétés géométriques et topologiques plus complexes, qui font intervenir des objets comme les attracteurs étranges difficiles à caractériser mathématiquement). Comme l'a

ISSN: 2317-9570

souligné le mathématicien Alain Connes, dans le monde réel il y a un générateur d'aléatoire, c'est l'essence même de la mécanique quantique, qui interdit, au moins en théorie, de prédire par exemple le moment exact où un atome va se désintégrer. Cela signifie que chaque seconde qui passe dans un volume d'espace donné engendre une certaine quantité d'informations complètement irréductibles au passé et absolument impossibles à prévoir.

4. Réflexions philosophiques sur la réalité mathématique et le monde physique

On peut dire que la réalité mathématique, et tout particulièrement la géométrie, est une source inépuisable d'informations, qui est irréductible à tout système de type fini ou même donné récursivement que l'on puisse imaginer. L'étude de la nature est elle aussi une source inépuisable d'informations. Les mathématiques (les entiers et les réels, la topologie et la géométrie) *informent* le monde, et le monde réel, grâce à l'action de ses principes et phénomènes fondamentaux, exercent une influence sur ses structures mathématiques, si bien qu'il est concevable qu'elles puissent évoluer dans un certain espace substrat et avec l'action du temps (par exemple, thermodynamique ou quantique). Les phénomènes des symétries et des brisures de symétries d'une part, et des systèmes chaotiques de l'autre, sont deux exemples très significatifs montrant que certains processus physiques dynamiques sont à même de créer des structures mathématiques nouvelles dans les phénomènes.

La réduction de la géométrie et plus généralement des mathématiques à un système d'axiomes fini vu comme des jeux de symboles (qui a été le rêve de l'école formaliste, axiomatique, puis bourbakiste) a compromis pendant des nombreuses années la possibilité de développer un projet d'*ontogenèse géométrique* des formes naturelles. Nous pensons qu'il est possible de développer un autre modèle théorique et empirique de géométrie. Si, d'une part, on ne peut certes ignorer qu'une des formes privilégiées par laquelle la géométrie exprime sa puissance générative est bien la construction, au-delà de toute contrainte physique et psychologique, d'entités idéales et d'objets de pensée, de l'autre, il faut en même temps et davantage comprendre que la signification de ces formes et de ces objets ne peut pas être pensée comme étant un simple produit de notre activité mentale ou de notre langage. Des concepts tels que ceux de fibré, de connexion, de nœud, de tresse, de bifurcation, d'attracteur étrange, etc., ont beaucoup plus le statut d'objets géométriques et/ou topologiques effectifs qu'une nature purement idéale déterminée de façon unique et définitive par un système d'axiomes portant sur

(cc) BY-NC-ND

des entités géométriques fantasmagoriques. De plus, il est clair que les objets différentiables, leurs déformations et leurs singularités sont doués d'une certaine ubiquité et universalité dans la nature.

Prenons un exemple, les «catastrophes élémentaires» de Thom (celles qui peuvent intervenir dans les familles génériques de fonctions dépendant au plus de quatre «paramètres de commande») sont des objets géométriques capables de déterminer un très grand nombre de changements d'état de beaucoup de systèmes (mécaniques, physiques, chimiques, et autres) que l'on peut souvent observer dans la réalité. Elles assurent également certaines propriétés caractéristiques d'une classe très large et variée de phénomènes, comme une certaines «stabilité structurelle», et on peut dire en ce sens que ces propriétés ont une portée universelle. Cependant, même si on peut observer beaucoup de phénomènes stables dans la nature, notamment tous ceux qui évoluent suivant un cycle parfaitement périodique, il y en a beaucoup d'autres qui sont semi-stables (par exemple, tous ceux qui cessent d'être périodiques pendant un certain temps à cause de fluctuations macroscopiques ou microscopiques ou d'autres perturbations), soit totalement instables, comme tous ceux où aucune périodicité, même la plus faible, n'apparaît: les systèmes dissipatifs et irréversibles appartiennent à cette catégorie. Tout phénomène observable ne peut donc pas être modélisé par un système stable. Techniquement, cela signifie que les systèmes stables ne sont pas denses.

5. Pourquoi les formes géométriques sont impliquées dans les processus naturels? Quelques exemples de "géométrie naturelle"

On voit que la géométrie peut en fait receler un contenu et une signification «magiques», c'est-à-dire un univers d'objets invisibles, implicites et virtuels. Le mot *magique* n'a bien sûr rien d'ésotérique et il signifie ici qu'une certaine géométrie est capable, en vertu de ses propriétés et de sa tendance à se transformer et également à transformer le type d'espace sur lequel elle opère, de donner lieu à des phénomènes et à des propriétés de ces mêmes phénomènes qui nous apparaissent d'une autre nature que ceux que l'on aurait pu déduire des axiomes de cette géométrie. Cela peut se résumer dans la formule suivante: ce à quoi les transformations d'une géométrie (par exemple, par l'action d'un groupe de symétries) ou d'une topologie (par une ou une série de déformations – immersions, plongements, etc.) définies dans un certain espace peuvent donner lieu, recouvre un domaine très vaste et ses contenus sont de loin beaucoup plus profonds et significatifs de ce qui est inclus dans les axiomes explicitement donnés de

ISSN: 2317-9570

n'importe quel système formel de géométrie. De ce point de vue, la géométrie et la topologie ont un *pouvoir intelligible* fondamental.

On peut dire que la géométrie joue un rôle dans des sciences naturelles autres que la physique depuis longtemps. Cela n'a pas été le cas de la topologie, branche des mathématiques beaucoup plus récente. Rappelons notamment les tentatives du grand mathématicien et *Naturphilosoph* allemand Bernhard Riemann (1826-1866) pour expliquer géométriquement des phénomènes liés à la théorie du spectre des couleurs, à la physiologie de l'ouïe, ou à la propagation des ondes planes d'amplitude finie[1]. Dans ce dernier travail, il a jeté les bases de la théorie de la propagation des ondes linéaires et non linéaires gouvernées par des équations hyperboliques. Mentionnons également les tentatives des physiciens britanniques William Thomson (1824-1907) et Peter Guthrie Tait (1831-1901) pour expliquer la structure des atomes[2]. Ces deux grands *Natural Philosophers* britanniques considéraient les atomes comme des vortex (tubes d'éther) noués dans le vide, et c'est à partir de cette idée qu'ils expliquaient les principales propriétés des atomes. En particulier, la stabilité de la matière pouvait être expliquée par la stabilité des nœuds, c'est-à-dire par leur nature topologique. La variété des constituants chimiques dont se compose la matière correspondrait à la variété des nœuds différents que l'on peut construire. Les oscillations vibratoires des nœuds-vortex pourraient expliquer les lignes spectrales des atomes. Enfin, la propriété que possèdent les atomes de se transformer en d'autres atomes lorsqu'ils sont soumis à des hautes énergies, pourrait être mis en relation aux propriétés de cassure et de recombinaison des nœuds. Ces idées ont été reprises et développées récemment dans le cadre des recherches notamment en physique des particules, en hydrodynamique, en chimie organique et en biologie moléculaire. Et pour certaines d'entre elles, on a même trouvé nombre de confirmations expérimentales, après qu'elles avaient été négligées ou mises de côté pendant longtemps.

Au début du XXe siècle il y a eu les premières véritables tentatives de géométriser quelques domaines des sciences de la vie et de l'homme, par l'introduction de quelques idées et méthodes géométriques fondamentales: ces domaines ont été précisément la morphologie biologique et la psychologie de la forme. Ceux-ci n'ont pas cependant abouti à l'époque, en partie du fait de leur incapacité à produire des résultats expérimentaux crédibles

[1] Bernhard Riemann's *Gesammelte mathematische Werk und wissenschaftlicher Nachlass*, herausgegeben von H. Weber und R. Dedekind, B. G. Teubner, Leipzig.

[2] W. Thomson, "On Vortex Atoms", *Proceedings of the Royal Society of Edinburg*, 6 (1867), 94-105. P. G. Tait, "On Knots I, II, III", *Scientific Papers*, Cambridge University Press, Cambridge, 1898-1900.

(cc) BY-NC-ND

et significatifs, en partie en raison de l'opposition sinon de l'hostilité de la part de la majorité des scientifiques et des expérimentateurs. On citera notamment l'ouvrage de D'Arcy Thompson, *On Growth and Form*, paru à Cambridge en 1917. Ce n'est que récemment qu'on s'est aperçu que ces idées présentaient quelque chose de fascinant et de fécond à la fois pour les mathématiciens et pour les naturalistes. On assiste aujourd'hui à un véritable renouveau de ces idées dans le cadre notamment de la biologie du développement d'une part, et de la physiologie de la perception de l'autre.

Dans l'ouvrage cité, un classique de philosophie naturelle, D'Arcy Thompson s'attache à montrer que toute forme matérielle d'un être vivant recèle un problème authentiquement mathématique. Thompson était persuadé que l'harmonie du monde transparaît dans la forme et le nombre, et que «le cœur et l'âme et toute la poésie de la philosophie naturelle sont personnifiés par le concept de beauté mathématique». Il s'était efforcé de montrer au naturaliste combien quelques concepts mathématiques et principes dynamiques pourraient lui venir en aide et le guider dans sa recherche d'une explication des phénomènes naturels. Pour lui, la forme d'un fragment de matière, vivante ou non, et les modifications de cette forme qui accompagnent ses mouvements ou sa croissance résultent de l'action de diverses forces. En bref, la forme d'un objet est la «résultante des forces», dans le sens que nous pouvons déduire de sa forme les forces qui agissent ou qui ont agi sur lui. Plus précisément, il s'agit bien, dans le cas d'un solide, d'une résultante des forces agissant sur lui au moment où il a pris sa configuration et des forces qui lui permettent de conserver cette conformation; dans le cas d'un liquide (ou d'un gaz), des forces qui, dans l'instant, agissent sur sa mobilité interne. Dans un organisme, grand ou petit, il nous faut interpréter en termes de forces (et de cinématique) non seulement la nature des mouvements de la matière vivante, mais aussi la conformation même de l'organisme dont la permanence ou l'équilibre s'expriment en termes physiques par l'interaction et l'équilibre des forces. Il est clair que D'Arcy Thompson pensait aux notions de force, de forme, et de géométrie comme d'un seul tenant, comme intimement entrelacées car indissociables dans leur action même. Dynamique (mouvements et actions des forces), géométrie (transformations conformes, courbure), et morphologie (conformation des organismes, configurations de leur équilibre, modifications de leur forme) sont pour le naturaliste écossais toutes également indispensables à l'étude et à la compréhension de la nature, elles sont un seul et même processus, une seule et même réalité.

 Revista de Filosofia Moderna e Contemporânea, Brasília, v.8, n.1, abr. 2020, p. 139-173
ISSN: 2317-9570

6. Remarques sur la topologie du vivant

Revenons brièvement à la nature et à la signification actuelles de la géométrisation dans les sciences du vivant. Commençons par une réflexion générale à laquelle nous ferons suivre deux ou trois exemples qui, à mon avis, illustrent très bien les caractères nouveaux et fondamentaux du rôle de la géométrie (et de la topologie) dans ces domaines. On remarquera qu'il y a deux points de vue très réducteurs et erronés qu'il faudrait abandonner: l'un est celui de beaucoup de mathématiciens, qui généralement considèrent la modélisation mathématique en biologie comme une simple application sans grand intérêt mathématique; l'autre est celui de la grande majorité des biologistes, qui voient dans la modélisation mathématique, en particulier lorsque l'on affaire à des études analytiques des systèmes d'équations, un intérêt strictement mathématique, n'ayant donc aucune portée réelle (théorique et empirique) pour la connaissance des systèmes biologiques. Ils considèrent qu'il s'agit d'un exercice formel n'ayant aucune conséquence en biologie. Toutefois, il apparaît de plus en plus que la biologie nous met sur la voie de nouveaux concepts et modèles mathématiques qu'il faut étudier et approfondir[3]; il existe des situations biologiques fondamentales qui exigent pour leur compréhension profonde l'invention de nouvelles méthodes et notions mathématiques[4].

En effet, le grand défi de la biologie aujourd'hui revient à montrer que la production du vivant doit beaucoup à un certain type de mécanismes topologiques qui interviennent directement dans les processus biologiques, et que ces mêmes processus se déroulent et évoluent dans des espaces et des temps spécifiques. L'idée tout à fait nouvelle, par rapport à toutes les tentatives antérieures de modélisation des phénomènes biologiques, est qu'il existe une véritable *topologie du vivant*, qui agit dynamiquement sur un type spécifique d'espace, à savoir l'espace substrat des processus génétiques et des activités métaboliques de tout organisme vivant. À vrai dire, cette idée n'est pas tout à fait nouvelle, puisqu'elle avait déjà été proposée dans les années 1960 par le biologiste C. H. Waddington, par le mathématicien René Thom dans les années 1970, et par le philosophe Gilbert Simondon dans les années 1990. Ces mécanismes topologiques contrôlent notamment la relation entre les changements internes ayant leur siège dans l'organisme depuis les

[3]Voir, entre autres, la tentative récente d'A. Carbone et M. Gromov, «Mathematical Slices of Molecular Biology», numéro spécial de la *Gazette des Mathématiciens*, SMF, supplément au n° 88, 2001, 80 p.

[4]Voir L. Boi, "Topological Knots Theory in Physics and Biology. Mathematical Ideas for Explaining Inanimate and Living Mater", in *Geometries of Nature, Living Systems and Human Cognition. New Interactions of Mathematics with Natural Sciences and the Humanities*, World Scientific, Singapore, 2005, 203-287.

(cc) BY-NC-ND

premières phases du développement de l'embryon et dont l'ensemble définissent son ontogenèse, qui constituent ce qu'on peut appeler un «milieu d'intériorité», et les facteurs biophysiques et biochimiques appartenant à un «milieu d'extériorité» plus large, qui inclut également les facteurs environnementaux pouvant affecter la réponse et la fonction de l'organisme à tous les niveaux . Or il s'agit d'arriver à montrer que cette topologie du vivant joue un rôle fondamental dans les processus de régulation épigénétique et physiologique de l'organisme au cours du développement et de l'évolution.

Comme le grand embryologiste et généticien C. H. Waddington l'avait suggéré[5], on est en face de la nécessité d'élaborer une théorie topologique suffisamment générale, qui serait appropriée pour décrire et expliquer la genèse des formes biologiques. Une telle théorie, disait-il, doit être conçue en les termes d'opérateurs topologiques, c'est-à-dire embrassant des notions telles que: déploiement d'une surface, percement de trous, invagination à travers de régions localisées, etc. Cela revient au fond à montrer l'importance primordiale qu'ont certaines opérations et transformations topologiques dans les principaux événements génétiques et morphogénétiques qui accompagnent le développement des organismes vivants.

Les modèles topologiques peuvent revêtir une double signification. D'une part, ils permettent du moins en principe de reconstruire une forme globale (une forme biologique) à partir de ses propriétés locales comme la polarité qui intervient dans les premiers stades du développement de l'embryon, la symétrie radiale et bilatérale, les bifurcations, les brisures de symétries, les «attracteurs cellulaires», etc. De l'autre, ils permettent de générer certaines propriétés locales à partir de contraintes globales, ou des caractéristiques individuelles à partir de principes génériques; dans ce cas, c'est tout l'organisme qui est morphologiquement et fonctionnellement impliqué dans la construction de tel ou tel organe spécifique, dans la mise en place de telle ou telle fonction particulière.

Il y a une raison fondamentale qui, à notre avis, justifie l'intérêt que les biologistes devraient accorder aux concepts topologiques. C'est le fait qu'ils sont appropriés à modéliser l'une des caractéristiques fondamentales du développement des organismes vivants, à savoir que des perturbations locales d'un certain type (par exemple: altérations moléculaires, mutations génétiques, disfonctionnements cellulaires, etc.) d'un embryon n'altèrent pas le cours global de son développement. Autrement dit, l'organisme cherche toujours la solution la plus optimale

[5] Cf. C. H. Waddington, *Genetics and Development*, London, 1962.

Revista de Filosofia Moderna e Contemporânea, Brasília, v.8, n.1, abr. 2020, p. 139-173
ISSN: 2317-9570

et la plus stable qui va permettre la reproduction et la conservation de ses structures au cours du développement et de la morphogenèse. Des discontinuités locales du type que nous avons rappelé plus haut, aux caractères parfois discrets et aléatoires, qui interviennent à divers stades du développement aux niveaux aussi bien microscopique de la molécule que mésoscopique de la cellule et macroscopique des organes, semblent évoluer en accord avec un plan global d'organisation qui, en revanche, est fondamentalement continuiste et déterministe, au sens dynamique et émergentiste et non pas statique et préformiste du terme.

Un exemple de ce type d'émergentisme en biologie du développement est suggéré par le concept de champs morphogénétique, à la condition de préciser que les champs morphogénétiques – tels que ceux caractérisés par Lewis Wolpert dans sa théorie de «l'information positionnelle», ou ceux que l'on retrouve dans la théorie du paysage épigénétique de Waddington – ont des effets physiques et biochimiques mesurables. L'hypothèse suggère, plus précisément, que des champs morphogénétiques spécifiques sont responsables de la genèse des formes et de l'organisation des structures des systèmes biologiques à tous les niveaux de complexité.

Une réflexion analogue peut être faite pour les «champs embryonnaires», qui ont la capacité d'induire, lors des premiers stades du développement, des migrations cellulaires le long de certains axes de symétrie où doit se produire le développement futur de l'embryon, puis d'une compactation progressive qui s'accompagne d'une augmentation de la densité cellulaire et d'une répartition discrète des masses des cellules dans des régions avec un potentiel de croissance élevé. Il s'agit de ce qu'on pourrait appeler un *espace cellulaire*, c'est-à-dire un ensemble de territoires morpho-fonctionnels disposés en apparence de façon discrète. Mathématiquement parlant, cette répartition et redistribution cellulaire, qui débute avec la gastrulation et qui se poursuit avec la neurulation puis la formation des tissus et des organes, a lieu sous le mode d'un *feuilletage* dans l'espace topologique de l'embryon, disons E ; chaque feuillet du futur embryon adulte correspondra ainsi à un sous-espace, disons F, qui a la propriété topologique d'être homéomorphe (mais pas nécessairement difféomorphe[6]) à E.

Ces champs ordonnent les systèmes avec lesquels ils sont associés en influant sur des événements qui, d'un point de vue énergétique, paraissent indéterminés ou probabilistes, dans le sens qu'ils imposent des contrain-

[6] La distinction entre *homéomorphismes* et *difféomorphismes*, qui a une signification fondamentale en mathématiques, pourrait également jouer un rôle important en biologie, tout particulièrement dans le processus de la gastrulation en embryogenèse.

(cc) BY-NC-ND

tes ordonnées aux conséquences énergétiquement possibles des processus biophysiques et biochimiques. Les champs morphogénétiques présentent des structures caractéristiques qui sont modélisables en termes de position et de compartimentation spatiales. Il y a bien sûr plusieurs points qui restent obscurs dans ce genre de formalisation. D'abord quelle est la nature de l'agent déclencheur de ces déformations menant à la formation des trois feuillets germinatifs (l'endoderme, le mésoderme et l'ectoderme) du futur organisme adulte? Est-ce qu'il est purement physico-chimique? Ou principalement mécanique comme certains chercheurs y ont récemment insisté[7]? Serait-il entièrement déterminé par un ensemble de règles déjà inscrites dans un programme génétique unique? Ou il ne faudrait-il plutôt envisager l'hypothèse que ce programme soit pour ainsi dire en puissance et que c'est la manière dont l'action des gènes obéit à des modifications épigénétiques et à certains processus morphogénétiques (tant moléculaires que cellulaires) qui est décisive pour le développement? Ce sont là autant de questions ouvertes auxquelles il faut essayer d'apporter une réponse.

Cette propriété topologique de la *stabilité structurale*, qui peut se traduire dans l'idée que des accidents de nature locale sont, sous certaines conditions favorables, canalisés par des contraintes et des principes globaux de l'organisme, correspond, d'un point de vue biologique, à la *régulation* et à l'*homéostasie*. En bref, beaucoup de systèmes en développement sont capables de régulation, c'est-à-dire que si on enlève (ou si on ajoute) une partie à un système en développement comme l'embryon humain, ce système continue à se développer de manière à produire une structure plus ou moins normale. La démonstration classique de ce phénomène a été réalisée dans les années 1890 par les embryologistes Hans Driesch qui a employé dans ce but des embryons d'oursins, et surtout par Hans Spemann (1924), à l'occasion de ses découvertes fondamentales montrant le rôle important de l'*induction cellulaire* au cours du développement dans beaucoup d'organismes. Cette propriété de stabilité a été désignée par Waddington par le terme d'*homeorhesis*, c'est-à-dire la capacité qu'a un organisme de se développer suivant son cours normal, et ce en dépit des perturbations auxquelles il peut être sujet. On a démontré que la régulation est à l'œuvre dans de nombreux systèmes en développement. Il est vrai que cette capacité peut être réduite lors des dernières phases du développement lorsque la «destinée» des différentes régions de l'embryon est déjà déterminée. Mais il n'est pas moins vrai que les systèmes où la dé-

[7] *Voir notamment les travaux de Thomas Lecuit et de Vincent Fleury sur la morphogenèse et la dynamique du vivant.*

ISSN: 2317-9570

termination se produit à un stade précoce, par exemple dans les embryons d'insectes, on assiste à une régulation après que l'œuf a été endommagé. Ces résultats montrent que les systèmes en développement progressent en fonction d'un plan morphologique global, et que ces systèmes possèdent des propriétés qui non seulement influencent ce plan, mais en plus lui permettent de se réaliser même si des parties du système sont détruites et si le cours normal du développement est perturbé.

Beaucoup de systèmes biologiques sont des formes structurellement stables. Un exemple important est celui des systèmes dits *isochrones*, notamment les «horloges biologiques» dont le comportement a été analysé par Arthur Winfree[8], et formalisé mathématiquement par John Guckenheimer[9], qui a montré que le concept de système isochrone est étroitement lié à celui d'une variété stable dans la théorie des systèmes dynamiques. On appelle *variété stable* un espace morphologique ou phénoménologique qui accepte différents types de changements qualitatifs tout en conservant sa structure fondamentale. La preuve de ce fait fondamental requerrait de développements techniques et l'analyse de quelques théorèmes (des cas particuliers du grand théorème sur l'invariance homéomorphique de certaines classes de variétés stables) qui ne peuvent pas être donnés ici. Bornons-nous à observer que beaucoup d'objets donnés naturellement sont des formes structurellement stables; en effet, ils sont toujours soumis à des influences perturbatrices de la part du milieu extérieur qui, si faibles soient-elles, auront un effet sur la forme de l'objet ou du système, cependant, en raison même de la permanence de cette forme, ces perturbations ne devront pas faire sortir de ce que, en mathématiques, on appelle la classe de G-équivalences, à laquelle appartiennent toutes les formes stables du type topologique.

Évidemment les choses sont beaucoup plus difficiles dans le cas de beaucoup de systèmes au comportement complexes comme les systèmes biologiques ou d'autres systèmes dynamiques non linéaires, chaotiques ou pas. En particulier, il s'avère dans ce cas difficile voire impossible l'étude de la morphologie (microscopique et macroscopique) d'un organisme biologique en admettant qu'en chaque point de l'espace-temps approprié l'évolution de cette morphologie est gouvernée par un système dynamique différentiable qui dépend de l'«état local» en le voisinage de ce point, sans faire intervenir des notions topologiques globales.

La thèse qu'on cherche à présenter ici peut se résumer ainsi: les propriétés de la matière vivante se manifestent

[8] Arthur T. Winfree, *The Geometry of Biological Time*, Springer, New York, 1980.
[9] Voir notamment «Isochrons and Phaseless Sets», *Journal of Mathematical Biology*, 1 (3), 1975, 259-273.

(cc) BY-NC-ND

comme le maintien, l'auto-entretien de certaines situations topologiques bien plus qu'uniquement comme des conditions énergétiques et fonctionnelles pures. C'est pourquoi l'organisation et l'individuation vivantes doivent être pensées selon des schèmes topologiques. Même si cette thèse apparaîtra injustifiée à la plupart des biologistes, elle n'en présente néanmoins un certain intérêt lorsqu'on regarde à trois phénomènes biologiques différents, mais tous essentiels pour comprendre certains des processus profonds qui sous-tendent la morphogenèse et l'ontogenèse. Ils concernent plusieurs niveaux d'organisation des systèmes vivants: moléculaire et supramoléculaire, cellulaire et celui des structures génétiques. Limitons- nous à quelques brèves considérations sur chacun d'entre eux, dans le but de mettre en évidence le rôle fondamental qu'y jouent certains concepts géométriques et topologiques. Il va de soi que nous ne pouvons pas ici aborder les détails mathématiques et biologiques.

7. L'organisation spatiale de l'embryogénèse animale

(i) L'embryogenèse animale montre qu'une réorganisation spatiale prend place lors de certains processus embryogénétiques fondamentaux; en plus, cette réorganisation joue un rôle important dans le développement physiologique de l'embryon. Considérons ce qu'on appelle l'*invagination*, qui constitue la seconde étape de la *gastrulation* et qui amène à la formation du système digestif. L'invagination induit des processus morphologiques qui permettent d'élucider certains aspects essentiels de la genèse de nouvelles formes chez les organismes vivants. Dans un premier temps, un groupe de cellules se détachent de la région végétative de l'embryon et migrent individuellement dans le blastocèle, puis se déplacent dans la cavité du blastocèle, où elles se répartissent en un anneau autour du pôle végétatif. Elles s'organisent ensuite pour former l'architecture primaire de l'embryon. Dans un deuxième temps, la région végétative aplatie se déforme (sous l'action vraisemblablement de certains inducteurs biochimiques et signaux intracellulaires) et s'enfonce en doigt de gant dans la blastocèle. La cavité ainsi formée correspond à l'archentéron ou intestin primitif; elle communique avec l'extérieur par un orifice, le blastopore. Ce qui est essentiel à ce stade est que la partie interne de l'espace de l'embryon, résultant de ce processus d'invagination topologique de la masse cellulaire, continue de communiquer avec sa surface externe. Plus précisément encore, les trois feuillets germinatifs (l'ectoderme, le mésoderme et l'endoderme) doivent rester connexes tout au long de ces transformations que nous venons de voir pour que les différentes migrations

Revista de Filosofia Moderna e Contemporânea, Brasília, v.8, n.1, abr. 2020, p. 139-173
ISSN: 2317-9570

et groupements cellulaires, ainsi que la formation des tissus et des organes, puissent se réaliser dans des conditions à peu près normales (c'est-à-dire sans obstructions pathologiques) jusqu'à la construction complète de l'organisme adulte. Dans tout cela, l'idée essentielle sur laquelle il faut insister est que l'invagination (c'est pareil pour la gastrulation) de l'archentéron suit une série ordonnée de déformations topologiques fondamentales, grâce auxquelles on peut reconstruire les phases du processus biologique lui-même. Ce qui signifie que ces transformations géométriques et déformations topologiques sont porteuses de certains changements embryogénétiques fondamentaux chez tout organisme en développement.

(ii) Depuis le début des années 1980 on a commencé à comprendre qu'il doit y avoir une relation fondamentale entre le domaine des formes mathématiques et le domaine des processus vitaux, en particulier entre la topologie des nœuds et la biologie moléculaire. La découverte récente d'une nouvelle espèce d'enzymes, les topoisomérases, qui sont capables de modifier les propriétés spatiales de l'ADN, représente un saut qualitatif essentiel dans l'approfondissement d'une telle relation, et elle offre également un moyen pour estimer le type de nœuds mathématiques qui se forment et leur occurrence. Ces enzymes catalysent le changement de configuration des anneaux d'ADN. Une caractéristique tout à fait remarquable est que les déformations dans la configuration topologique des nœuds (formés par le surenroulement des brins d'un anneau d'ADN bicaténaire) et de la structure moléculaire de la cellule ne changent pas quelques-unes de leurs propriétés fondamentales. Ce sont donc des invariants dotés de certaines propriétés mathématiques et biologiques fondamentales. Cela veut dire que les informations portées par la molécule d'ADN sont indépendantes de la façon dont elle est tortillée, enchevêtrée ou nouée dans le noyau de la cellule. Or on a pu montrer comment la conformation spatiale de la molécule d'ADN et des protéines qui agissent sur elle joue un rôle fondamental pour la réalisation de certaines fonctions biologiques vitales. En particulier, les opérations topologiques des enzymes topoisomérases assurent la recombinaison, la réplication et la transcription de la molécule d'ADN. Ces opérations sont notamment le nouement, l'enlacement et le surenroulement, qui correspondent mathématiquement à la formation de nœuds dans les deux brins d'ADN, à la formation d'entrelacs et à plusieurs rotations de l'un des brins autour de l'autre de la double hélice[10]. Le point essentiel est que ces événements gé-

[10]Les notions mathématiques qui traduisent de manière précise ces opérations sont celles de *plongement* d'une courbe (lisse) fermée dans $R3$ (sans auto-intersection), de rotation d'une courbe autour d'une autre courbe formant des boucles, et de torsion complète (de 360°) d'une courbe.

(cc) BY-NC-ND

nétiques d'importance vitale pour tout organisme ne sont possibles que parce que les enzymes topoisomérases modifient la configuration topologique de l'ADN.

(iii) Le développement et la morphogenèse d'une cellule, et a fortiori d'un organe, ne peuvent se concevoir sans l'existence des protéines. Or pour être biologiquement actives, ces protéines doivent adopter un repliement spécifique, une forme spatiale unique, grâce à une série de mouvements particuliers dont les règles sont dictées par leur structure interne, et tout d'abord par l'enchaînement des maillons qui les composent. Cependant, même si un grand nombre de protéines, et particulièrement les protéines de petite taille, se replient selon ces règles spontanément dans un tube à essai, il n'en va pas de même dans le contexte cellulaire naturel où l'acquisition de la forme est un processus hautement complexe qui exige plusieurs séquences de mouvements de repliement et de dépliement; ce deuxième mouvement est nécessaire à la protéine pour pouvoir passer différentes frontières qui séparent les divers compartiments de la cellule, et elle se replie à nouveau une fois sa destination finale atteinte. Dans la cellule, les processus de repliement des protéines, qui convertit l'information génétique en une activité cellulaire, doit être contrôlé dans l'espace et dans le temps pour être efficace, et c'est probablement à cet effet que toute une catégorie de protéines appelées «protéines chaperons» a été sélectionnée au cours de l'évolution. La structure et le repliement des protéines font partie intégrante des constructions moléculaires qui aident à l'acquisition de certaines formes spatiales dans le contexte cellulaire.

Ces exemples montrent l'importance qu'ont les concepts géométriques et topologiques dans la compréhension des processus biologiques, et surtout le fait qu'il existe une corrélation fondamentale entre certaines transformations géométriques et déformations topologiques et quelques-uns des processus embryogénétiques, physiologiques et génétiques essentiels à la vie.

8. La géométrie comme "langage" de la nature et du vivant

La géométrie constitue très probablement un des "langages" par lesquels la nature et le vivant s'organisent, évoluent et se régénèrent. Mais il n'est sans doute pas le seul, car on a besoin d'une pluralité de théories et de méthodes pour essayer de rendre compte de l'extraordinaire complexité des phénomènes naturels et humains. Parmi eux, il faut compter certes les mathématiques et la physique, de même que la biologie et l'anthropologie, mais aussi la littérature et l'art.

En d'autres termes, il faut être critique à l'égard de toute tentative con-

ISSN: 2317-9570

sistant à ériger la géométrie en paradigme unique et absolu de la science et de la connaissance. Il serait illusoire et vain aujourd'hui de prétendre fonder une sorte de pangéométrisme. D'abord parce qu'il n'existe pas une seule géométrie qui soit capable de nous donner une représentation unique de la réalité, elle-même très diversifiée et complexe car organisée selon différents niveaux d'organisation chacun desquels peut certes présenter des propriétés géométriques communes, mais il peut aussi se caractériser par une structure tout à fait spécifique. Il n'existe pas non plus un seul espace physique qui soit apte à expliquer le déroulement et le comportement des phénomènes: l'espace physique des corps macroscopiques à notre échelle pour lequel valent les lois de la mécanique classique n'est pas le même espace physique des phénomènes à grande échelle de la relativité générale pour lesquels vaut le modèle de géométrie pseudo-riemannienne (différentiable), et celui-ci n'est pas de même nature que l'espace physique des phénomènes quantiques à l'échelle des particules subatomiques, pour lesquels on suppose l'existence d'une géométrie quantique (non différentiable).

Ensuite, pour la raison que la géométrie n'est pas qu'un ensemble de notions idéales et abstraites qui auraient une existence statique et qui seraient définies une fois pour toutes. Elle doit être conçue plutôt comme relative à un certain type d'espace un univers d'objets et d'entités ayant des propriétés qui peuvent changer sous l'effet de la structure locale et/ou globale de l'espace, sous l'action du temps et en contact avec l'action de certaines forces physiques. Nous savons que selon la théorie de la relativité générale, la forme géométrique de l'espace et notamment sa courbure peut changer en fonction de la distribution de la matière-énergie dans l'univers et que, réciproquement, la géométrie et la topologie[11] de l'espace influencent la façon dont les phénomènes physiques se comportent dans l'univers. Cela signifie que la géométrie même est désormais conçue comme un objet dynamique, car elle affecte le comportement de la matière (il suffit de penser à un rayon lumineux voyageant dans le vide dont la trajectoire est fléchie par la courbure de l'espace), et elle est affectée par la densité de la matière qui se transmet à l'univers tout entier sous le mode d'impulsion-énergie (pensez ici à un corps céleste très massif qui courbe la région de l'espace avoisinante).

[11] Il est important de souligner le rôle que joue la topologie en relativité générale. En effet, même en absence de forces, la topologie de l'espace-temps produit des effets physiques et influence l'évolution des phénomènes.

(cc) BY-NC-ND

9. Réductionnisme et émergence.

Cette question touche également à une question plus générale, qui est celle du réductionnisme en sciences d'un côté, et des propriétés émergentes de l'autre, ces deux aspects étant en réalité profondément liés. Sur un plan heuristique et méthodologique, un certain réductionnisme est peut-être inévitable dans la mesure où on entend par là la recherche de certains principes communs à des phénomènes divers, et qui pourraient ainsi être à la base de la réalité physique. On pourrait difficilement nier, de ce point de vue, l'hypothèse selon laquelle, à un certain niveau, le comportement autant de notre corps que de notre cerveau, de la matière aussi bien organique qu'inorganique est contrôlé et/ou gouverné par un ensemble de lois fondamentales de nature physique et chimique. Mais le fait d'admettre l'existence de lois fondamentales qui régissent le comportement des phénomènes animés et inanimés, n'implique en rien la possibilité de reconstruire l'univers tout entier à partir de ces lois. Ce qui paraît fondamental pour la physique des particules élémentaires, ne l'est point pour d'autres sciences de la nature et encore moins pour les sciences de la vie et de l'homme.

Comme l'a fait remarquer le grand physicien Paul Anderson[12], la thèse réductionniste stricte tombe en pièces lorsqu'elle est confrontée avec les problèmes des niveaux d'échelle et de la complexité. Même en se limitant à la physique, par exemple, le comportement complexe d'un très grand agrégat de molécules ne peut pas être compris en extrapolant à partir des propriétés de quelques particules élémentaires. Car à chaque niveau de complexité, de propriétés entièrement nouvelles peuvent apparaître. S'il est vrai, d'une part, que les entités «élémentaires» (d'ailleurs, pas tout à fait élémentaires non plus[13]) de la physique de l'état solide, de la chimie, de la biologie moléculaire, de la biologie cellulaire, de la psychologie, etc., obéissent aux lois, respectivement, de la physique des particules élémentaires, de la physique à *n*-corps, de la chimie, de la biologie moléculaire, de la physiologie, etc., il est tout aussi vrai, de l'autre, que cette sorte de hiérarchie des sciences n'implique pas que les sciences du second groupe soient seulement ce qui résulte de l'application des sciences du premier groupe. La psychologie n'est pas de la biologie appliquée, ni la biologie est de la chimie appliquée, etc.

Soulignons-le une fois de plus: à chaque stade et niveau d'organisation de la matière, des concepts, modèles et

[12] P. W. Anderson, "More is Different. Broken symmetry and the nature of the hierarchical structure of science", Science, 177 (4047) 1972, 393-396.

[13] Sur ce point, je renvoie à mon article "Remarks on the geometry of complex systems and self-organization", in *Complessità e Riduzionismo*, F. Fano *et al.* (eds.), *Isonomia-Epistemologica*, 2 (2012), 21-36.

principes parfois très différents sont nécessaires pour rendre compte des propriétés nouvelles qui émergent et des comportements nouveaux qui apparaissent dans les phénomènes. Lors d'une transition d'une phase dans la matière, par exemple celle qui fait passer de l'état solide à l'état liquide, ou du passage d'un niveau d'organisation à un autre, c'est un véritable changement dans le comportement des phénomènes qui se produit, et ce qui était une simple dissemblance quantitative devient une différence qualitative. Or le mécanisme appelé «brisure de symétrie» – qui est un concept essentiellement géométrique indiquant que les lois de symétrie d'un système physique deviennent spontanément asymétriques lorsque celui-ci doit passer à une autre phase (le fait par exemple que beaucoup de cristaux perdent leur symétrie est un effet spontané de leur recherche d'un état d'énergie minimal) –, est ce qui permet une telle différentiation qualitative des phénomènes[14]. La prise en compte de cette situation rend impossible l'application du point de vue réductionniste. D'une manière générale, l'exigence d'arriver à donner une explication de plus en plus profonde et la question de la recherche du sens en sciences, telles que se posent en particulier dans les phénomènes biologiques, nécessitent que l'on développe une approche dynamique et complexe des changements d'état de la matière et de la connaissance des niveaux d'organisation du monde vivant.

10. Sur la nature de la géométrie

Les considérations précédentes ne contredisent cependant pas le fait que la géométrie joue effectivement un rôle essentiel dans l'intelligibilité de la réalité mathématique et de la réalité physique et également, comme nous avons essayé de le montrer, des processus biologiques. Mais ce qui est peut-être encore plus important, est le fait que ses objets et ses structures sont en quelque sorte impliqués dans la production des phénomènes et dans l'engendrement de nouvelles propriétés de ceux-ci. Nous avons déjà donné quelques exemples montrant clairement cette interdépendance entre structures géométriques et réalités naturelles. Deux points méritent davantage d'être élucidés. Le premier est que la géométrie n'est pas à proprement parler un langage ou il n'est pas qu'un langage au sens d'un pur système de symboles. Il est à la fois une théorie de l'espace (plutôt des espaces), et un univers constitué d'objets et d'entités mathématiques qui non seulement participent de la réalité empirique dans la mesure où ils sont à la source de certaines de ses propriétés, mais en plus ils informent les phénomè-

[14]Cf. L. Boi, *Symétries, brisures de symétries et complexité, en mathématiques, physique et en biologie*, Peter Lang, Berne, 2006.

(cc) BY-NC-ND

nes physiques, biologique et aussi en quelque sorte psychiques, dans le double sens qu'ils leur donnent une forme et une pluralité de manifestations.

En tant que théorie de l'espace, la géométrie peut se concrétiser en plusieurs structures différentes, c'est-à-dire qu'un même espace peut admettre non pas une mais deux, trois, et même un très grand nombre de structures très différentes ou isomorphes entre elles. Un premier exemple étonnant, découvert par le mathématicien américain John Milnor en 1963, montre l'existence de plusieurs structures lisses (28 pour être exact !) sur la sphère à sept dimensions S^7? Autre exemple non moins étonnant est que l'espace R^4 possède une infinité de structures différentiables, appelées «exotiques» (c'est-à-dire non classiques) par celui qui les a découvertes en 1983, le mathématicien britannique Simon Donaldson. Ce résultat magnifique tout à fait insoupçonné (très technique pour pouvoir en donner les détails ici), traduit le fait que l'univers géométrique (différentiable) de la dimension 4 est riche en invariants de diverse nature, d'où ses liens essentiels notamment avec les théories des champs quantiques et d'autres domaines de la physique par l'intermédiaire des groupes et pseudogroupes de symétries et des symétries brisées. Le physicien-mathématicien de Princeton Edward Witten a récemment montré, dans quelques travaux fondamentaux[15], que certains invariants topologiques fournissent de l'information précieuse sur les états physiques à basse énergie. Par exemple, la théorie mathématique de Hodge sur les formes harmoniques a permis de mettre en évidence que les états d'énergie nulle correspondent à la cohomologie des formes différentielles.

Le deuxième point à souligner se réfère à l'idée fondamentale selon laquelle chaque niveau d'organisation de la réalité physique et biologique peut présenter une structure géométrique spécifique. Ce n'est pas seulement une question d'échelle des phénomènes. Considérons un exemple. La géométrie qui sous-tend la physique à l'échelle de Planck présente très vraisemblablement une nature beaucoup plus discrète et floue, du fait qu'elle sujette aux fluctuations quantiques et à des superpositions non linéaires, que la géométrie essentiellement continue qui régit les phénomènes aux grandes échelles de la relativité générale. Or cette idée a une signification très profonde, qui est que tout nouveau niveau d'organisation qui apparaît dans la matière, quelle soit d'ailleurs physique ou biologique, peut comporter

[15]Cf. en particulier «Topological Quantum Field Theory», *Commun. Math. Phys.*, vol. 117, 1988, pp. 353-386. Pour un exposé clair et général sur certains nouveaux invariants géométriques et topologiques de dimension 3 et 4 en théorie quantique des champs et en théorie des cordes, voir D. Bennequin, «Invariants contemporains», dans *Nouveaux invariants en géométrie et en topologie*, Panoramas et Synthèses, N° 11, SMF, 2001, pp. 131-159.

l'émergence de propriétés dynamiques et de structures géométriques entièrement nouvelles. Nous avons déjà vu que c'est bien ce qui se produit dans les cas des cristaux dits «apériodiques», du comportement des systèmes dynamiques chaotiques, du développement des organismes vivants et également dans le processus de la perception spatiale.

On peut donc affirmer, pour conclure, que la géométrie et la topologie sont, plus que tout autre science ou activité humaine, intimement liées à l'intelligibilité de la réalité matérielle, biologique et psychique, et profondément impliquée dans l'apparition de nouvelles structures et de nouveaux comportements dans les phénomènes. J'ai l'intime conviction qu'il ne peut pas y avoir de recherche de la "vérité" et de la "beauté" artistiques dans la nature sans une compréhension de sa géométrie (de ses géométries) profondes et parfois invisibles. L'intériorité de la nature, pour utiliser cette expression, se construit et se manifeste grâce et à travers des formes et des propriétés géométriques. Leur puissance explicative et générative est évidente dans la plupart des domaines et des problèmes en mathématiques tout aussi bien que dans les sciences de la nature et de l'homme. Leur apport fondamental concerne d'abord et avant tout ces disciplines qui sont confrontées à la question de l'espace et du temps dans ses différents aspects, mais il concerne également, de plus en plus et au plus profond, les études qui abordent les questions cruciales liées au développement du vivant et la manière dont se constitue notre perception de la réalité et émerge notre conscience, c'est-à-dire donc notre rapport au monde.

11. Le lien entre l'espace et le monde physique

On peut dire que l'espace constitue, d'une certaine façon, le lien entre la réalité empirique et la réalité mathématique, dans le sens qu'il est en effet impossible de s'imaginer que ce qu'on appelle généralement la réalité empirique, c'est-à-dire l'ensemble des corps physiques et des phénomènes naturels qui la constituent, puisse avoir une existence en dehors et indépendamment de l'espace et également du temps. Einstein nous a appris que tout corps physique macroscopique est un événement qui évolue à la fois dans un espace d'un certain type et au cours du temps (c'est le continuum espace-temps de la relativité générale), et que cette évolution est en quelque sorte déterminée par la structure géométrique caractéristique de cet espace-temps. C'est cette géométrie qui confère une «histoire» aux corps physiques situés dans notre univers en leur conférant le statut d'événements.

Les objets quantiques aussi sont définis dans un espace mathématique abstrait (un espace d'Hilbert muni de ce

 (cc) BY-NC-ND

qu'in appelle une algèbre d'opérateurs – ce sont les observables de la théorie quantique), bien qu'il soit impossible de le localiser d'une manière univoque et absolue. Les théories physiques récentes, en particulier les théories de jauge non-abéliennes et théorie des supercordes, reposent sur l'idée fondamentale que c'est la structure géométrique de l'espace-temps qui est à l'origine du comportement dynamique, et non pas seulement cinématique, des phénomènes physiques qu'y sont situés. Cela désormais ne concerne pas uniquement le champ gravitationnel, mais également l'électromagnétisme et les autres champs de matière. Le statut privilégié qu'a l'espace dans ces théories, et le fait qu'il est le lieu où coexistent la réalité empirique et la réalité mathématique, apparaît clairement de deux manières.

Selon la première, ce sont les symétries spatio-temporelles et les symétries physiques qui dictent les interactions entre les différents champs et types de particules. La seconde contribue à mettre en évidence le rôle capital que joue de plus en plus la topologie dans pratiquement toute la physique, mais tout particulièrement dans les théories de jauge et en cosmologie. En effet, certains modèles cosmologiques conçoivent l'univers comme un tout par une certaine forme globale et certaines propriétés topologiques qui, en plus d'imposer des contraintes sur la manière dont évolue et s'étend la structure spatiale de chaque région de l'univers, influencent sa dynamique, en particulier, la plus ou moins grande distribution de matière et de densité d'énergie, l'histoire des particules de lumière (les photons) au sein de ce qu'on appelle la *structure causale* de l'espace-temps. Il semblerait d'ailleurs que le changement de topologie soit responsable d'une certaine instabilité concernant l'évolution quantique du champ scalaire dans ce même espace-temps.

De plus, un des aspects les significatifs et féconds des théories des champs quantiques, est d'avoir montré que toute l'information locale concernant le comportement dynamique des particules et la manière dont les forces fondamentales interagissent, est en quelque sorte emmagasinée dans la structure topologique de l'espace-temps. On comprend donc que l'espace est doublement important en physique: du fait de sa géométrie locale, qui peut être plus ou moins rigide et contraignante, et grâce à sa forme topologique globale, qui lui confère une plus grande souplesse et élasticité, ce qui le rend beaucoup plus déformable et susceptible de varier.

Soulignons également un autre aspect, que je crois fondamental, de la question relative à la connexion entre l'espace et le monde physique. C'est que la pensée mathématique puise ses connaissances dans l'intuition de l'espace d'une part, et dans le raisonnement fondé sur les entiers naturels de l'autre. Mais ces nombres, comme les autres classes de nombres, ont eux-mêmes une existence dans l'espace euclidien et dans d'autres espaces plus fins et de plus grande dimension, bien qu'ils puissent être définis par une méthode entièrement formelle qui fait abstraction de l'intuition de l'espace. Néanmoins, c'est précisément cette intuition de l'espace qui permet de faire le lien entre le monde des entités mathématiques et la réalité physique[16].

12. Les concepts de groupe et de nœud

Considérons brièvement les exemples du concept de groupe de transformations et du concept de nœud. Le premier est une notion mathématique qui peut être définie d'une façon tout à fait formelle par une liste finie d'axiomes, mais il est en même temps un objet géométrique (une série de transformations – de symétries – obéissant à certaines règles précises) qui, fait agir – localement ou globalement, de façon continue ou discrète – sur un certain espace ou une certaine région de celui-ci (un sous-espace) comme l'espace euclidien ou tout autre espace localement difféomorphe à l'espace euclidien, impose à celui-ci une ou plusieurs structures invariantes qui peuvent être mises en correspondance avec des principes de conservation (c'est-à-dire des propriétés qui restent inchangées) de certains phénomènes physiques. S'il n'y avait pas d'espace auquel appliquer tel ou tel groupe de transformations (de symétries), il n'aurait aucun sens de parler de principes de conservation d'un certain type de grandeurs fondamentales de la réalité physique. C'est-à-dire que, de ce point de vue, affirmer qu'un espace peut être transformé de façon à ce que néanmoins sa structure demeure invariante, c'est la même chose qu'affirmer qu'il y a des propriétés fondamentales des phénomènes qui se conservent lorsqu'on leur fait subir certaines transformations physiques.

Il y a un théorème, dû à la mathématicienne allemande Emmy Noether en 1918, qui joue un rôle fondamental en physique. Énoncé simplement, ce théorème dit qu'à chaque groupe continu de symétries de l'espace-temps correspond une loi de conservation d'une grandeur physique. Par exemple, la conservation de l'énergie correspond à l'invariance de la théorie par rapport aux rotations.

L'objet nœud se définit mathématiquement comme un *plongement* d'une courbe fermée à une dimension ou du cercle S^1 (un bout de ficelle dont on a rejoint les deux extrémités) dans la sphère à trois dimensions S^3 ou dans l'espace euclidien R^3. Un plongement

[16] Voir L. Boi, "The Role of Intuition and Formal Thinking in Kant, Riemann, Husserl, Poincaré, Weyl, and in Contemporary Mathematics and Physics," *Kairos*, 22 (2019), 1-53.

(cc) BY-NC-ND

est une manière de déformer un espace donné en l'appliquant sur lui-même ou sur un autre espace. Il y a un résultat très joli et profond en même temps, énoncé par le topologue Kurt Reidemeister en 1920, qui dit que l'on peut transformer un nœud dans un autre par une manipulation continue dans l'espace, et que cette manipulation est la donnée d'un petit nombre (trois pour l'exactitude) de mouvements, appelé *mouvements de Reidemeister*, que l'on peut figurer sous la forme d'une projection diagrammatique dans le plan.

Le point essentiel pour nous ici, c'est qu'un concept topologique comme celui de nœud, qui peut vite se révéler d'une extrême richesse et complexité, finira nécessairement par produire, lors ses différents plongements dans l'espace (en fait dans divers espaces), de nouvelles propriétés physiques et même biologiques douées d'un certain pouvoir fonctionnel. Or c'est bien ce qui a lieu en physique, dans des domaines aussi divers que les champs quantiques et l'hydrodynamique, où certains invariants topologiques de nœuds sont intimement liés au comportement des phénomènes physiques à l'échelle quantique et macroscopique, respectivement. Mais également en biologie où, comme nous l'avons déjà mis en évidence, les structures nodales sont à l'origine même des mécanismes les plus fondamentaux du vivant. Nous résumerions tout cela en disant que les phénomènes physiques à différentes échelles et la matière vivante aux niveaux aussi bien moléculaire et macromoléculaire que cellulaire s'organisent au mieux, sur les plans à la fois morphologique et fonctionnel, en épousant la forme et la structure topologique de ces objets mathématiques abstraits que sont les nœuds dans l'espace où ils sont eux-mêmes «plongés».

Pour conclure, l'espace est effectivement le lieu où des entités mathématiques abstraites rencontrent des sections de la réalité empirique; en d'autres termes, c'est le lieu où ces entités, par le fait même de transformer l'espace et de se laisser transformer, à leur tour, par l'espace, finissent par générer de la réalité empirique. On pourrait en fait affirmer que tout phénomène physique et tout système naturel résultent de l'action de tel et tel objet mathématique abstrait sur un certain espace substrat. Il suffit de penser à l'espace de phases dans la théorie des systèmes dynamiques, où un objet mathématique abstrait comme une courbe intégrale ou un cycle limite défini dans cet espace correspond qualitativement au mouvement (c'est-à-dire à la trajectoire temporelle) d'un système physique concret comme, par exemple, un pendule rigide, un oscillateur, un complexe chimique de polymères, un organisme vivant, etc., et où à chaque état du système on associe un objet géométrique «représentatif» dans cet espace, de sorte que l'évolution du système dans le temps dépend des configurations (des portraits) possibles de cet objet dans l'espace de phases.

Si la topologie et la géométrie sont impliquées dans de nombreux processus biologiques essentiels au développement des organismes vivants, c'est parce qu'elles sont à l'œuvre dans les déformations et transformations de l'espace substrat de ces organismes, depuis la différentiation cellulaire dans l'embryon jusqu'aux changements génétiques dans les molécules d'ADN, et inversement, selon différentes boucles d'actions et rétroactions non-linéaires. L'idée de fond, à laquelle les recherches récentes en biologie moléculaire et en biologie du développement apportent des preuves expérimentales de plus en plus décisives, est que toute régulation épigénétique et comportementale d'une espèce doit reposer sur une structure formelle à caractère géométrique et topologique qui se réalise dans l'espace des activités métaboliques de l'organisme. Ce qui signifie notamment, comme l'a fait très bien remarquer Alain Connes[17], qu'«un être vivant ne peut pas être réduit à un état physique hautement improbable d'un ensemble de molécules.»

C'est là un point fondamental sur lequel nous aimerions revenir. La thèse matérialiste prétend qu'un être vivant est entièrement descriptible idéalement par l'état physique – nature, position, vitesse instantanée des molécules qui la composent – et, par conséquent, les paramètres de cet état physique déterminent ses champs de force, gradients, potentiels internes, de sorte que les lois de la physique et de la chimie suffisent à elles seules à rendre compte de l'ensemble de ses réactions métaboliques intérieures et avec le milieu extérieur. Mais il ne faut pas confondre modèle et réalité. Or ce modèle réductionniste est contredit par les caractéristiques les plus fondamentales et spécifiques des êtres vivants.

Rappelons-les: les phénomènes biologiques ne peuvent pas être décrits uniquement par de "simples" lois physico-chimiques. Ou alors ils le peuvent mais de manière partielle et incomplète. Les systèmes biologiques sont constitués de plusieurs niveaux d'organisation correspondant à des échelles d'observation microscopique, mésoscopique et macroscopique: il faut en effet distinguer entre les niveaux moléculaire, macromoléculaire, de la cellule, de l'organe, de l'organisme, de l'individu, de l'espèce, de la communauté et de l'écosystème. Les échelles de temps et d'espace ainsi que les processus évolutifs et comportementaux sont très différents selon le niveau d'organisation et l'échelle d'observation auxquels on se place. La nature des dynamiques est très importante afin de

[17] Alain Connes (avec A. Lichnerowicz et M. P. Schützenberger), *Triangle de pensées*, Odile Jacob, 2000. Sur cette question, l'ouvrage de R. Thom, *Stabilité Structurelle et Morphogenèse. Essai d'une théorie générale des modèles* (Benjamin, New York 1972), constitue une mine d'idées originales et profondes.

(cc) BY-NC-ND

prendre en compte ces différents niveaux d'organisation.

Les comportements des organismes et des individus (les deux n'ont pas le même degré de complexité ontologique) ne peuvent pas être décrits par un petit nombre de lois physiques et chimiques de nature mécaniste et déterministe, et moins encore par un ensemble fini d'instructions informatiques. Car les organismes et les individus sont des systèmes essentiellement à la fois *finis* (c'est-à-dire matériellement finis) et *ouverts* (mentalement ouverts), aux dimensions et aux formes multiples et complexes, vivant dans un présent changeant, en quelque sorte tributaire du passé et continuellement projeté vers le futur. Enfin, et c'est pour nous le point central, même les molécules et les cellules, et a fortiori les organismes et espèces, sont organisées par un schéma morphologique d'ensemble irréductible à une collection de molécules et qui est aussi autre chose que le code génétique. Ce schéma est une entité topologique opératoire qui agit de façon hautement dynamique sur l'espace métabolique et fonctionnel de chaque être vivant en déterminant pour une grande partie ses propres processus de croissance, de régulation et de régénération. Et c'est lui qui caractérise un individu beaucoup plus que l'état physique, nature, position, vitesse instantanée des molécules qui le composent. Un exemple remarquable nous est fourni par le chromosome, qui constitue une sorte d'espace morpho-fonctionnel[18].

On voit par tout ce qui précède que les concepts géométriques et topologiques ont un rôle central à jouer dans la compréhension du monde mathématique tout come de l'univers physique. Il est clair que sans l'élaboration d'une nouvelle pensée de la spatialité, aucune explication véritable de la question fondamentale des rapports entre les réalités mathématique, physique et perceptive n'est possible.

Comme l'écrit, dans un très beau passage, le mathématicien et philosophe Hermann Weyl: «Nowhere do mathematics, natural sciences, and philosophy permeate one another so intimately as in the problem of space»[19].

13. Déformations de l'espace et genèse des formes

Nous pensons que le genre de codétermination qui existe entre la genèse des formes naturelles ou vivantes et leur signification ontologique se situe à un niveau encore plus profond de la connaissance que nous pouvons avoir du réel, et elle embrasse à la fois la totalité

[18] Pour une étude approfondie de cet espace, on renvoie à L. Boi, "Geometrical modeling of DNA supercoiling and the structural complexity of chromosome", *Biophysical Journal*, 2019 (à paraître).

[19] H. Weyl, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton University Press, Princeton, 1949.

et l'intériorité des phénomènes. Revenons sur l'analogie entre géométrie et physique. L'idée me semble-t-il essentielle de la relativité générale est d'avoir compris qu'il ne peut pas y avoir de physique, tout au moins à l'échelle macroscopique, localement dans l'espace-temps et de l'univers tout entier, en dehors et indépendamment de la géométrie qui caractérise ce même espace-temps. Les phénomènes physiques, pour Einstein, sont des effets produits par cette géométrie, qui devient ainsi lui-même un objet dynamique. C'est bien là la signification fondamentale des équations du champ gravitationnel données par Einstein en 1915, que l'on écrira sous la forme

$$R_{\mu\nu} - {}^1\!/_2\, g_{\mu\nu}R = -\, kT_{\mu\nu},$$

où $R= g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$ (k est la constante de Newton). Elles relient le tenseur de courbure ou tenseur de Ricci (une contraction du tenseur de Riemann associé à la forme métrique $g_{\mu\nu}$) $R_{\mu\nu}$ au tenseur impulsion-énergie $T_{\mu\nu}$; en d'autres termes, elles unissent la géométrie à la physique par le fait que le tenseur de courbure est une expression du champ gravitationnel.

Nos connaissances du monde physique proviennent en grande partie du fait d'avoir géométrisé les forces. La relativité générale d'Einstein (avec également les contributions fondamentales d'Hermann Weyl et d'Elie Cartan) a constitué un apport essentiel en ce sens. Avec les théories quantiques de jauge non-abéliennes, cette géométrisation connaît un approfondissement sans doute majeur, car le concept géométrique d'espace fibré muni d'une connexion et la courbure de cette connexion devient l'objet central de toute la physique. Il s'agit véritablement d'un schéma mathématique très universel permettant la description et l'explication d'un univers idéalisé dans lequel on considère qu'il entre un petit nombre d'interactions de base. L'état de la matière dans l'espace-temps, en chaque point et à chaque moment, décrit une connexion sur ce fibré. La matière agit sur la connexion en imposant des restrictions à sa courbure, et la connexion agit sur la matière en la forçant à se propager par «transport parallèle» le long des lignes d'univers. Les célèbres équations d'Einstein (comme nous venons de le voir), Maxwell- Dirac et Yang-Mills sont exactement l'expression de cette idée.

La théorie des supercordes, développée depuis une trentaine d'années par plusieurs physiciens et mathématiciens, représente une révolution conceptuelle encore plus radicale dans notre conception de la physique et de l'espace-temps. Je voudrais expliquer brièvement en quoi elle consiste. On sait que dans les théories des champs quantiques, même dans celles plus récentes comme la *Supergravité*, on considère que la matière est formée de composants ponctuels, les particules

(cc) BY-NC-ND

«élémentaires», et, en général, on a fait en plus l'hypothèse qu'aussi les interactions pouvaient s'interpréter comme des échanges de particules «messagères» ponctuelles, les quanta du champ de jauge. On s'est alors demandé, récemment, ce qui changerait si ces composants ne seraient pas ni élémentaires ni ponctuels, mais ils auraient une certaine étendue et structure spatiale interne plutôt complexe. Les conséquences les plus intéressantes apparaissent avec des objets à une dimension, les cordes, d'où le nom «théorie des supercordes».

Selon cette théorie, toutes les particules élémentaires auxquelles nous avons toujours associé l'image de points infimes dépourvus de toute structure interne, semblent être en fait, non pas des points, mais de boucles microscopiques, ouvertes ou fermées, qui se déplacent à travers l'espace d'un mouvement vibratoire (S'il est relativement facile de se faire une idée de ce qu'est une vibration dans notre vie courante, il est en revanche très difficile de visualiser le même phénomène à l'échelle 10^{--33} de Planck.). Dans l'image d'une particule comme d'un point, on pensait que celui-ci se déplaçait dans l'espace en décrivant une ligne, appelée «lignes d'univers», tandis que, dans cette nouvelle théorie, ce qui se produit c'est qu'à chaque instant cette particule se comporte vraiment comme une boucle infime, et on peut imaginer qu'elle devienne un lasso, une corde nouée, etc. De sorte que, au fur et à mesure que le temps s'écoule, cet infime lasso se déplace à travers l'espace en décrivant quelque chose qui ressemble plutôt à un tube (une sorte de cylindre), se déplaçant à son tour dans l'espace et créant donc, pour ainsi dire, son propre espace, comme un nœud peut, plongé ou déformé de plusieurs manières différentes, créer toute une variété de surfaces aux propriétés topologiques nouvelles. Le lien avec la physique consiste à penser qu'un tel déplacement correspond en réalité à la trajectoire d'une particule. Cette trajectoire peut avoir des allures mathématiques différentes: elle peut, sous certaines conditions physiques, même former un nœud sans ou avec singularités.

Cela a conduit à penser que les constituants de la matière atomique et subatomique, les atomes et les électrons en mouvement autour du noyau, les protons et les neutrons qui forment ce noyau, ainsi que les quarks, sont en fait des objets étendus et dynamiques dans l'espace. Ils seraient faits de morceaux de cordes, et ils auraient donc une seule dimension que l'on suppose être de l'ordre de grandeur de 10^{--33} cm. Toutes ces particules sont donc comme des cordes (fermées ou ouvertes, nouées ou pas nouées, enroulées sur elles-mêmes ou pas enroulées sur elles-mêmes) qui vibrent dans l'espace (un peu comme les vibrations des cordes

ISSN: 2317-9570

d'un violon[20]) et qui, en plus, présentent un certain degré de liberté, donc une sorte de combinaison de leurs propriétés intrinsèques et de leurs vibrations dans l'espace. Les propriétés intrinsèques sont l'équivalent de leurs symétries internes, représentées mathématiquement par un certain groupe qui peut être très compliqué. Les propriétés physiques des particules apparaissent ainsi comme autant de caractéristiques des formes spatiales auxquelles ces cordes peuvent donner lieu.

Ce sont donc des objets topologiques "vivant" dans l'espace physique des particules quantiques. La charge électrique, par exemple, peut être vue comme un effet produit par le mouvement de la corde plutôt que comme quelque chose qui s'ajoute à la particule comme objet fondamental. D'une manière générale, les propriétés physiques de la matière émergeraient, selon cette théorie, d'objets topologiques constitués de cordes, de cylindres, de tores, de boucles et de nœuds se formant dans l'espace quantique. On pourrait donc affirmer que, selon les théories physiques récentes qui poursuivent le programme de géométrisation de la physique commencé par la relativité générale, les propriétés et les comportements les plus essentiels des phénomènes physiques émergent de la forme topologique de l'espace physique.

14. Affinités et différences entre mathématiques et sciences humaines. Est-il possible de recomposer l'«esprit de géométrie» avec l'«esprit de finesse»?

Les sciences de l'homme, dont leur objet d'étude n'est pas, à proprement parler, un objet *matériel* comme l'entend notamment la physique, auraient aussi intérêt à réfléchir davantage en termes de géométrie. Il est clair en même temps que les sciences de l'homme et de la société ne sauraient en aucun cas être réduites, par exemple, à une sorte de «géométrie anthropologique» ou de «géométrie sociale». Des considérations s'inspirant de la géométrie pourraient néanmoins contribuer à élargir le champ d'investigation des certains objets auxquels les sciences humaines se trouvent continuellement confrontées, et à leur assigner une dimension en quelque sorte plus intrinsèque et dynamique. Après tout, des disciplines

[20]Cette analogie avec la musique est tout à fait parlante. Selon la théorie des cordes, les objets les plus fondamentaux ne sont pas des particules qui forment un point unique dans l'espace, mais des cordes à une seule dimension qui, tantôt ont des extrémités, tantôt constituent des boucles fermées. Comme les cordes d'un violon, les cordes dans cette théorie présentent certaines configurations vibratoires, ou résonnent selon certaines fréquences, dont des longueurs d'onde se répartissent entre leurs deux extrémités. Mais, si les diverses fréquences de résonnement des cordes d'un violon donnent naissance à des notes de musique différentes, les diverses oscillations d'une corde engendrent des masses et des charges de forces différentes, qui sont assimilées aux particules élémentaires. En gros, plus la longueur d'onde de l'oscillation sur la corde est courte, plus la masse de la particule est grande. On peut maintenant se demander, mais qu'est-ce qu'il y a de commune entre les cordes d'un violon et sa musique et la réalité physique et ses particules? La réponse est claire: c'est la géométrie!

(cc) BY-NC-ND

aussi diverses comme la démographie, l'histoire, l'anthropologie et la psychologie partagent un «objet» (ou un méta-objet) commun, qui est un espace constitué beaucoup plus de représentations abstraites, de typologies et de formes de pensée, de valeurs et de symboles, que de faits et de phénomènes physiques et matériels, même si la dimension physique et celle biologique ne sont pas pour autant absentes.

Il est clair qu'il y a *a priori* beaucoup plus de points en commun entre une région géographique définie par certains caractères sociaux et culturels et un espace anthropologique d'une certaine communauté caractérisé par un ou plus systèmes de représentations et symboliques, qu'il y en a entre ces espaces et l'espace quantique des particules de la matière subatomique. C'est l'étude de ce type d'espace, foncièrement façonné par l'action et la pensée humaines, qui devrait faire l'objet des sciences non matérielles. Ces sciences ne sont pas étrangères à la géométrie, dans la mesure où elles aussi étudient, par des méthodes qui leur sont propres, les transformations qualitatives (locales et globales, continues et discontinue, contingentes et nécessaires) des formes humaines, historiques et sociales sur des courtes et des longues échelles de temps. Ce sont, en d'autres termes, des disciplines morphologiques qui font nécessairement appel à des notions et à des méthodes géométriques.

Le lien entre les espaces géométriques et les espaces sociaux se fait à travers les formes: la forme, au sens de l'organisation interne et de la conformation globale d'un espace géométrique, ce qui va en quelque sorte servir de canevas pour l'architectonique d'un espace phénoménologique habité, va influencer le processus de constitution d'un espace social, de même que les comportements de ceux qui l'animent[21].

On remarquera que la mathématique est la première science à ne pas avoir d'objets matériels à proprement parler. En effet, elle élabore des objets qui existent d'abord et avant tout dans un monde idéal d'entités et des formes abstraites, bien que celles-ci ne soient pas nécessairement absolues, immuables et atemporelles, et qu'elles puissent même connaître des réalisations physiques concrètes. Or même le bourbakiste le plus orthodoxe ne pourrait pas nier que l'intuition géométrique est un élément essentiel du raisonnement mathématique[22]. Pour reprendre un exemple, il n'aurait pas été possible de découvrir le théorème de classification

[21] Nous avons approfondi cette question dans deux travaux récents: "Spazi geometrici, spazi vissuti e forme architettoniche: tra fenomenologia, geometria ed eco-architettura", in *Abitare: approcci interdisciplinari e nuove prospettive*, L. Boi, A. Cannas, L. Vargiu (eds.), University Cagliari Press, 2019, 1-28; et "Entrevista con Luciano Boi ¿Qué es la topología? Matemáticas, ciencia, filosofía y arte", in *Avatares de la forma II*, *Tópicos del Seminario*, janvier-juin 2020, 213-265.

[22] Sur le sujet, lire l'article éclairant de W. Thurston, "On Profs and Progress in Mathematics", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30 (2), 1994, 161-177.

des variétés compactes de dimension 2, sans l'apport fondamental d'une certaine intuition et imagination géométriques. Le théorème dit que *toute surface (ou variété à deux dimensions) compacte connexe orientée* $\sum$ *est homéomorphe (ou topologiquement équivalente) à l'une des trois variétés suivantes: la sphère, la somme connexe de tores, la somme connexe de plans projectifs* ; ou, ce qui revient au même: *toute surface compacte connexe orientée correspond à une sphère à laquelle on a rajouté un certain nombre d'anses (i.e. des sous-variétés compactes homéomorphes à la surface* $\sum$)[23]. Les mathématiques fécondes et «vivantes» sont celles qui associent un raisonnement analytique à une image géométrique, une entité abstraite (comme une fonction) à un objet «réel» plongé ou immergé comme une surface. Par exemple, pour que la surface de Riemann soit une sphère, il suffit qu'il existe pour une courbé de degré fixé un assez grand nombre de points doubles, qui obligent la courbe à être unicursale: on peut dessiner les points réels dans le plan d'un seul trait. Or des «faits» comme celui que l'on vient de voir mobilisent l'imagination, même sans démonstration, et permettent de mieux comprendre les idées sous-jacentes. Ces idées, qui font appel à la géométrisation et visualisation de la pensée mathématique, nous apprennent en effet à chercher et à trouver d'autres manifestations de l'unité du monde que celles apparentes.

Les sciences humaines peuvent avoir un support matériel, mais leurs objets ne sont pas, dans la majorité des cas, de nature matérielle, au sens que l'entend la physique. Leurs objets ne peuvent pas être définis uniquement par des paramètres spatiaux et temporels comme c'est en général le cas pour les objets de la physique, mais ils exigent en plus d'être qualifié par des propriétés qui font directement référence aux événements et aux actes humains, et à leur signification, qui n'est jamais unique et complétement déterminée.

Et pourtant, la géométrie peut avoir une place importante dans ce type de représentations. Pour le montrer, considérons brièvement le problème de la perception, qui présente des aspects aussi bien psychologiques qu'esthétiques. L'une des idées parmi les plus profondes que les théoriciens de la *gestalt* ont élaborée, est de dire que les propriétés du monde phénoménal perçues par un observateur ne correspondent pas nécessairement à des propriétés d'objets physiques existant dans la réalité matérielle. L'autre idée

[23]Pour une étude approfondie, voir L. Boi: "The *Aleph* of Space. On some extension of geometrical and topological concepts in the twentieth-century mathematics: from surfaces and manifolds to knots and links", in *What is Geometry?*, G. Sica (ed.), Polimetrica International Scientific Publishers, Milano, 2006, pp. 79-152; "Imagination and visualization of geometrical and topological forms in space: about some formal, philosophical and pictorial aspects of mathematics", in *The Philosophy of Science – Challenges and Tasks*, coll. Dokumenta, vol. 9, O. Pombo and G. C. Santos (eds.), Lisbonne, 2016, pp. 224-263.

(cc) BY-NC-ND

intéressante qu'ils ont avancée a été sans doute d'avoir montré que tout objet de perception peut avoir, en plus de ses propriétés *physiques* se référant à sa constitution matérielle, des qualités *phénoménales* et d'autres relatives à (des critères de) la *forme* des objets et processus de perception; ces dernières qualités renvoient à des dimensions proprioceptives et sémantiques qui sont absentes dans l'objet physique comme tel.

Par exemple, physiquement l'objet triangle n'est que l'ensemble de ses trois éléments agencés d'une certaine manière, tandis que perceptivement est beaucoup plus que cela. Une des acceptions de l'objet triangle est en fait d'être un «quasi-objet» ou un «objet illusoire». Bien que ce genre d'objets soit des idéalisations (ou abstractions) mathématiques, il n'en demeure pas moins vrai que ceux-ci peuvent être perçus, et cette perception est dépendante autant des propriétés physiques des objets que de leurs qualités phénoménales; en plus, ces dernières ne se laissent pas expliquer en termes uniquement des premières. Dans un travail récent, nous avons montré que le fait de percevoir certains objets comme des «non-objets», c'est-à-dire des objets dont les qualités apparentes sont en contraste avec leurs propriétés physiques caractéristiques, est essentiellement dû à l'existence d'un certain type d'anomalies dans leur structure géométrique. Cela veut dire qu'il existe un lien entre certaines propriétés géométriques intrinsèques qui caractérisent des catégories d'objets comme les «triangles impossibles» (ou «triangles illusoires») et leur apparente impossibilité perceptive.

D'une manière générale, une qualité sensible, comme la couleur, n'est pas un simple attribut des objets, ni d'ailleurs une pure impression que ceux-ci «imprimeraient» sur notre activité mentale. De même qu'il n'y a pas de support matériel inerte de la couleur, de même, la couleur n'est pas quelque chose qui se juxtapose passivement à son support. Les qualités chromatiques ne peuvent pas être considérés seulement comme des matériaux à partir desquels s'organise la perception de l'espace, mais il faut aussi et surtout tenir compte de l'influence que l'organisation phénoménale de l'espace exerce sur l'aspect de l'élément chromatique lui-même. Espace et couleur ne sont donc pas des données distinctes, que l'on peut considérer séparément, mais bien plus des variables interdépendantes d'un processus unitaire global d'organisation perceptive.

Un dernier aspect de la question concerne le phénomène de complexité croissante. La question qui se pose est de savoir ce que pourrait être la cause dans le temps et dans l'espace de quelque chose d'atemporel et d'a-spatial. En particulier, est-ce que la question de la constitution du sens peut être abordée uniquement en la ramenant à la description des conditions purement

ISSN: 2317-9570

spatiales et temporelles dans lesquelles cette constitution se réalise? Ou est-ce qu'il ne faudrait pas plutôt considérer l'hypothèse que le sens, sa recherche et sa construction, qui s'expriment dans des formes et modalités différentes, soit en quelque sorte un niveau d'organisation de la réalité morphologiquement et structurellement autonome par rapport à l'espace et au temps? On peut remarquer, en réfléchissant à la nature des rapports entre matière et esprit, qu'il est important de redéfinir la matière en termes de processus, d'interactions et d'évolutions, tout comme il est important de repenser l'esprit comme étant une forme qui émerge du dynamisme interne et des différentes interactions de la matière organique, sans être pour autant une forme matérielle. Il est donc beaucoup plus un processus d'un type particulier qu'il faut mettre en relation avec certains modes spécifiques d'organisation de la matière organique.

Bibliographie

ANDERSON, P. W., "More is different. Broken symmetry and the nature of hierarchical structure of science", *Science*, 177(4047), 1972, 393-396.

ATIYAH, M., *The Geometry and Physics of Knots*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

BERGSON, H., *L'évolution créatrice*, Félix Alcan, Paris, 1907.

BERTHOZ, A., *Le sens du mouvement*, Odile Jacob, Paris, 1998.

BOI, L., "Imagination and visualization of geometrical and topological forms in space: about some formal, philosophical and pictorial aspects of mathematics", in *The Philosophy of Science – Challenges and Tasks*, coll. Dokumenta, vol. 9, O. Pombo and G. C. Santos (eds.), Lisbon, 2016, pp. 224-263.

BOI, L., "The *Aleph* of Space. On some extensions of geometrical and topological concepts in the twentieth-century mathematics: from surfaces and manifolds to knots and links", in *What is Geometry?*, G. Sica (ed.), Polimetrica International Scientific Publishers, Milano, 2006, 79-152.

BOI, L., *Le problème mathématique de l'espace. Une quête de l'intelligible*, Préface de R. Thom, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1995.

BOI, L., *Symétries et brisures de symétries, en mathématiques, physique et biologie*, Peter Lang, Berne, 2006.

BOI, L., *Morphologie de l'invisible. Transformations d'objets, formes de l'espace, singularités phénoménales et pensée diagrammatique*, Presses Universitaires de Limoges, 2011.

BOI, L., Romero, A., "Spatiality, Geometrical Fields, and the Phenomenology of Perception", *Philosophical Psychology*, 2019 (forthcoming).

BOI, L., *Science et Philosophie de la Nature. Un nouveau dialogue*, Peter Lang, Berne, 2000.

Boi, L., The *Quantum Vacuum. A Scientific and Philosophical Concept, from Electrodynamics to String Theory, and the Geometry of the Microscopic World*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2011.

BOI, L., "La géométrie: clef du réel? Pensée de l'espace et philosophie des mathématiques", *Philosophiques*, 24 (2), 1997, 389-430.

BOI, L., "Die Beziehungen zwischen Raum, Kontinuum und Materie im Denken Riemanns; die Äthervorstellung und die Einheit der Physik. Das Entstehen einer neuen Naturphilosophie", *Philosophia Naturalis*, 30 (2), 1994, 171-216.

BOI, L., "Questions Regarding Husserlian Geometry and Phenomenology. A Study of the Concept of Manifold and Spatial Perception", *Husserl Studies*, 20 (3), 2004, 207-267.

BOI, L., "Topological knot models in physics and biology. Mathematical ideas for explaining inanimate and living matter", in *Geometries of Nature, Living Systems and Human Cognition. New Interactions of Mathematics with Natural Sciences and the Humanities*, L. Boi (ed.), World Scientific, Singapore, 2005, 203-278.

(cc) BY-NC-ND

BOI, L., "Geometry of dynamical systems and topological stability: from bifurcations, chaos and fractals to dynamics in the natural and life sciences", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21 (3), 2011, 815-867.

BOI, L., "Ideas of Geometrization, Geometric Invariants of Low-Dimensional Manifolds, and Topological Quantum Field Theories", *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 6 (5), 2009, 701-757.

BOI, L., "Theories of Space-Time in Modern Physics", *Synthese*, 139 (3), 2004, 429-489.

BOI, L., "Some mathematical, epistemological and historical reflections on the relationship between geometry and reality, space-time theory and the geometrization of theoretical physics, from Riemann to Weyl and beyond," *Foundations of Science*, 24 (1), 2019, 1-38.

BOI, L., "Phénoménologie et méréologie de la perception spatiale, de Husserl aux théoriciens de la Gestalt", in *Rediscovering Phenomenology. Phenomenological Essays on Mathematical Beings, Physical Reality, Perception and Consciousness*, L. Boi, P. Kerszberg & F. Patras (eds.), Springer-Verlag, Dordrecht, 2007, 40-80.

BOI, L., *The Quantum Vacuum. A Scientific and Philosophical Concept: From Electrodynamics to String Theory and the Geometry of the Microscopic World*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2011.

CONNES, A., Lichnerowicz, A., Schützenberger, M.P., *Triangle de pensées*, Odile Jacob, Paris, 2000.

CONNES, A., "A View of Mathematics", Institut des Hautes Etudes Scientifiques, June 2010.

CONNES, A., *Géométrie non commutative*, InterEditions, Paris, 1990.

GIBSON, J.J., *The Ecological Approach to Visual Perception*, Houghton Mifflin, Boston, 1986.

GRANGER, G.-G., *La pensée de l'espace*, Odile Jacob, Paris, 1999.

GRANGER, G.-G., *Sciences et réalité*, Odile Jacob, Paris, 2001.

GROMOV, M., "Space and questions", *GAFA*, *Geom. Funct. Anal.*, Special Volume (2000), 118-161.

GROMOV, M., "Manifolds: Where Do We Come From? What Are We? Where Are We Going", September 2010, 1-68.

HEIDEGGER, M., *Gesamtausgabe I. Abt. Vol. 7: Vorträge und Aufsätze (1936-1953)*, Frankfurt am Main, Vittorio Klostermann, 1992.

HEISENBERG, H., *La partie et le tout. Le monde de la physique atomique*, Flammarion, Paris, 2010.

HILBERT, D., and P. Cohn-Vossen, *Geometry and Imagination*, American Mathematical Society, 1999. (First German edition, *Anschauliche Geometrie*, Berlin, 1932).

HUSSERL, E., *Husserliana XVI. Ding und Raum, Vorlesungen 1907*, Ed. Ulrich Claesges, Martinus Nijhof, The Hague, 1973.

KANISZA, G., *La grammaire du voir*, Diderot multimédia, Paris, 1999.

MERLEAU-PONTY, M., *Phénoménologie de la perception*, Gallimard, Paris, 1964.

PENROSE, R., RINDLER, W., *Spinors and Space-Time*, Vol. 2, *Spinor and Twistor Methods in Space-Time Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

PENROSE, R., *The Road to Reality: A Complete Guide to the Laws of the Universe*, London, 2004.

POINCARÉ, H., *Œuvres complètes*, tomes I-XII, Gauthier-Villars, Paris, 1893-1908. Poincaré., H., *La science et l'hypothèse*, Flammarion, Paris, 1902.

POINCARÉ, H., *Dernières pensées*, Flammarion, Paris, 1913.

RIEMANN, B., *Bernhard Riemann's mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*, herausgegeben von H. Weber und R. Dedekind, B. G. Teubner, Leipzig, 1876.

SIMONDON, G., *L'individu et sa genèse physico-biologique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1964.

THOM, R., *Apologie di logos*, Hachette, Paris, 1990.

THOM, R., *Esquisse d'une sémiophysique: Physique aristotélicienne et théorie des catastrophes*, InterEditions, Paris, 1989.

THOM, R., *Prédire n'est pas expliquer*, Flammarion, Paris, 1993.

THOM, R., *Stabilité structurelle et morphogenèse. Une théorie générale des modèles*, Benjamin, New York, 1971.

THOM, R., *Théorie des catastrophes*, Flammarion, Paris, 1983.

THOMPSON, D'Arcy W., *Growth and Form*, Cambridge University Press, Cambridge, 1917.

THURSTON, W., "On proofs and progress in mathematics", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 30 (2), 1994, 161-177.

THURSTON, W., "How to see 3-manifolds", *Classical and Quantum Gravity*, 15 (9), 1998, 2545-2571.

THURSTON, W., "Hyperbolic geometry, three-dimensional manifolds and Kleinian groups", *Bull. Amer. Math. Soc.* (New Series), 6 (1982), 357-381.

THURSTON, W., *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Princeton University Press, Princeton, 1997.

VUILLEMIN, J., *Philosophie de l'algèbre*, Presses Universitaires de France, Paris, 1962.

VUILLEMIN, J., *La logique et le monde sensible. Étude sur les théories modernes de l'abstraction*, Flammarion, Paris, 1971.

WADDINGTON, C. H., *The Nature of Life*, Allen & Unwin, London, 1961.

WADDINGTON, C.H., *The Strategy of Genes*, Allen & Unwin, London, 1957.

WERTHEIMER, H., "Untersuchungen zur Lehre der Gestalt". *Psychologische Forschung*, 3 (1923), 301-350.

WEYL, H., *Mind and Nature*, University Pensylvania Press, Philadelphia, 1934.

ISSN: 2317-9570

WEYL, H., *Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grudlagen der Analysis*, Verlag von Veit & Comp., Leipzig, 1918.

WEYL, H., *Philosophy of Mathematics and Natural Sciences*, Princeton University Press, Princeton, 1949.

WINFREE, A. T., *The Geometry of Biological Time*, Springer, New York, 1980.

WITTEN, E., "Topological Quantum Field Theories", *Commun. Math. Phys.*, 117 (1988), 353-383.

Reçu / Recebido: 03/10/2019
Approuvé / Aprovado: 27/01/2020
Publié / Publicado: 20/09/2020