Sobre a Noção Categorial de Proto-topos

[On the Categorical Notion of Proto-topos]

Edelcio G. de Souza*

Resumo: O objetivo da presente trabalho é mostrar como é possível fazer semântica para linguagens proposicionais em ambientes categoriais que não sejam *topos*. Proponho a definição de dois tipos de categorias denominadas *categorias com morfismos verdade* (CTM) e *proto-topos*. Em categorias com morfismos verdade, pode-se definir as "funções de verdade" que correspondem aos conectivos lógicos de negação, conjunção, implicação e disjunção. Em proto-topos, pode-se mostrar que as "funções de verdade" assim definidas satisfazem certas propriedades desejáveis com respeito aos valores de verdade *verdadeiro* e *falso*.
Palavras-chave: linguagens proposicionais, semântica categorial, morfismos verdade, proto-topos

Abstract: The aim of this paper is to show how is possible to do semantic for propositional languages in a categorical setting different from topos. I propose the definition of two kinds of categories called *categories with truth morphisms* (CTM) and *proto-topos*. In categories with truth morphisms, it can be defined the truth functions that correspond to the logical connectives of negation, conjunction, implication and disjunction. In proto-topos, I show that the truth functions defined in CTM's satisfy certain desirable properties with respect to the truth values true and false.
Keywords: propositional languages, categorical semantics, truth morphisms, proto-topos

1. Introdução

Na segunda metade do século XX, com os trabalhos de Lawvere, Tierney e outros, foi definida um importante tipo de categoria denominada *topos* (elementar)[1]. Em topos, pode-se desenvolver completamente a semântica para as linguagens de primeira ordem, junto com os conceitos relacionados de consequência e validade lógica. Descobriu-se, então, que as sentenças dessas linguagens que são válidas em topos são precisamente as teses da lógica intuicionista. Um resultado importante e, de certo modo, surpreendente e filosoficamente relevante[2].

*Edelcio Gonçalves de Souza, Departamento de Filosofia - FFLCH - USP, edelcio.souza@usp.br.

[1] Ver Lawvere 1964, Lawvere 1970 e Tierney 1972.

[2] Ver Boileau-Joyal 1981. Para a lógica intuicionista ver Heyting 1966.

ISSN: 2317-9570

DOI: https://doi.org/10.26512/rfmc.v6i2.22103

Todavia, quando nos restringimos apenas às linguagens proposicionais standard e, portanto, à definição dos morfismos verdade usuais, percebi que não era necessário operar em um ambiente categorial de topos. Procurei, então, responder à seguinte questão: *Qual é o ambiente categorial mais simples que seja capaz de definir os morfismos verdade usuais que correspondem à negação, conjunção, implicação e disjunção?*

A resposta à questão acima formulada é a definição que proponho de dois tipos de categorias que constituem generalizações da noção de topos. Estas são as *categorias com morfismos verdade* (CTM) e os *proto-topos*.

2. Topos

Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita *finitamente bicompleta* (completa e cocompleta) quando todo diagrama finito em $\mathcal{C}$ possui limite e colimite. Nesse caso, $\mathcal{C}$ possui objetos terminais e iniciais e, em $\mathcal{C}$, pode-se fazer uma série de construções úteis: produtos e coprodutos de objetos e morfismos, equalizadores e coequalizadores, pullbacks e pushouts, etc[3].

Diz-se que uma categoria $\mathcal{C}$ *possui exponenciação* se, para cada $\mathcal{C}$-objeto a, temos um funtor exponencial $(-)^a : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ que é adjunto à direita do funtor $(-) \times a$. Em termos elementares, isso significa que $\mathcal{C}$ tem produto para cada par de $\mathcal{C}$-objetos e, para quaisquer $\mathcal{C}$-objetos dados a e b, existe um $\mathcal{C}$-objeto, dito a *exponencial* de b por a, denotado por b^a, e um $\mathcal{C}$-morfismo $ev_{ab} : b^a \times a \to b$, denominado *morfismo avaliação*, tal que vale a seguinte propriedade universal: Para todo $\mathcal{C}$-objeto c e $\mathcal{C}$-morfismo $g : c \times a \to b$, existe um único $\mathcal{C}$-morfismo $\hat{g} : c \to b^a$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
b^a \times a \arrow[dr, "ev_{ab}"] & \\
& \mathrm{b} \\
c \times a \arrow[uu, dashed, "\hat{g} \times 1_a"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

isto é, $ev_{ab} \circ (\hat{g} \times 1_a) = g$. Segue-se, imediatamente, que existe uma correspondência biunívoca entre as classes $\mathcal{C}(c \times a, b)$ e $\mathcal{C}(c, b^a)$[4]. Quando uma categoria $\mathcal{C}$ é finitamente completa e possui exponenciação, então $\mathcal{C}$ é denominada uma *categoria cartesiana fechada*.

Considere um objeto d em uma categoria $\mathcal{C}$. Um subobjeto de d é uma certa classe de equivalência de monomorfismos com codomínio d. Sejam os $\mathcal{C}$-monomorfismos $f : a \rightarrowtail d$ e $g : b \rightarrowtail d$. Dizemos

[3]Vou utilizar a notação de Goldblatt 2006. Para textos de teoria de categorias em geral, pode-se consultar Arbib-Manes 1975, Awodey 2010, Herrlich-Strecker 1973 e MacLane 1971.

[4]Se $\mathcal{C}$ é uma categoria e a e b são dois $\mathcal{C}$-objetos, então $\mathcal{C}(a, b)$ denota a classe de todos os $\mathcal{C}$-morfismos de a em b.

que f é equivalente a g, em símbolos $f \equiv g$ se existe um isomorfismo $h : a \to b$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "h"'] & \\ & d \\ b \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

comuta, isto é, $f = g \circ h$.

É fácil ver que $\equiv$ é uma relação de equivalência e, se $Mon(d)$ é a classe dos monomorfismos com domínio d, então um *subobjeto* de d é qualquer elemento do conjunto quociente:

$$Mon(d)/\equiv := \{[f]_{\equiv} : f \in Mon(d)\}.$$

Se $\mathcal{C}$ é uma categoria com objeto terminal 1, então um *classificador de subobjetos* para $\mathcal{C}$ é um $\mathcal{C}$-objeto Ω junto com um $\mathcal{C}$-morfismo $\top : 1 \to \Omega$ tal que satisfaz a seguinte propriedade universal:

(Ω-Axioma). Para cada monomorfismo $f : a \rightarrowtail b$ existe um único $\mathcal{C}$-morfismo $\chi_f : d \to \Omega$, denominado o *morfismo característico* ou o *caráter* de f, tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "!"'] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

é um quadrado pullback.

Com os ingredientes introduzidos acima pode-se definir a noção categorial de topos (elementar).

Definição 1 (Lawvere e Tierney) *Um **topos** (elementar)*[5] *é uma categoria $\mathcal{E}$ tal que:*

i. $\mathcal{E}$ é finitamente completa;

ii. $\mathcal{E}$ é finitamente cocompleta;

iii. $\mathcal{E}$ tem classificador de subobjetos;

iv. $\mathcal{E}$ possui exponenciação.

Depois que essa definição de topos foi estabelecida, C. J. Mikkelson descobriu que a condição *ii.* é implicada pelas outras condições[6]. Assim, um topos pode ser definido como uma categoria cartesiana fechada com classificador de subobjetos[7].

Um aspecto que vai se revelar importante para o presente trabalho é uma propriedade fundamental de categorias cartesianas fechadas que provém, utilizando-se exponenciação, da correspondência biunívoca entre as classes $\mathcal{C}(c \times a, b)$ e $\mathcal{C}(c, b^a)$, para todo $\mathcal{C}$-objeto a e b.

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria cartesiana fechada e 0 é um objeto inicial em $\mathcal{C}$, então se existe um $\mathcal{C}$-morfismo $f : a \to 0$, tem-se que f é

[5]A palavra “elementar” é introduzida para distinguir essa noção da noção de topos original devida a A. Grothendieck (ver SGA4). No que se segue, a palavra “elementar” sempre será omitida.

[6]Ver Pare 1974.

[7]Para uma introdução à teoria de topos, ver Bell 2008, Freyd 1972, Johnstone 1977, Johnstone 2002, Kock-Wraith 1971, MacLane-Moerdijk 2012 e MacLarty 1995.

um isomorfismo (e, assim, a é inicial em $\mathcal{C}$).

Segue-se da propriedade fundamental acima que: *Em uma categoria cartesiana fechada $\mathcal{C}$, todo $\mathcal{C}$-morfismo $0 \to a$, cujo domínio é um objeto inicial em $\mathcal{C}$, é um monomorfismo.*

Quando a categoria $\mathcal{E}$ é um topos, várias propriedades podem ser estabelecidas. Mencionarei algumas que serão relevantes nas construções que se seguem[8].

Teorema fundamental da teoria de topos - Freyd. Se $\mathcal{E}$ é um topos e a é um $\mathcal{E}$-objeto, então a categoria slice $\mathcal{E} \downarrow a$ é também um topos.

Segue-se do teorema fundamental dois fatos básicos enunciados a seguir.

Fato 1. Em $\mathcal{E}$, pullbacks preservam epimorfismos. Isto significa que se o diagrama

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & b \arrow[d, "f"] \\ c \arrow[r] & d \end{tikzcd}$$

é um quadrado pullback e f é um epimorfismo, então g é também um epimorfismo.

Fato 2. Em $\mathcal{E}$, coprodutos preservam pullbacks. Isto é, se os quadrados do diagrama

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\mathrm{f}"] \arrow[d, "\mathrm{g}"'] & d \arrow[d, "k"] & a' \arrow[l, "f'"'] \arrow[d, "g'"] \\ b \arrow[r, "h"'] & e & b' \arrow[l, "h'"] \end{tikzcd}$$

são pullbacks, então o quadrado

$$\begin{tikzcd} a + a' \arrow[r, "{[f,f']}"] \arrow[d, "g+g'"'] & d \arrow[d, "k"] \\ b + b' \arrow[r, "{[h,h']}"'] & e \end{tikzcd}$$

é um pullback também.

3. Linguagens proposicionais

Considere uma *linguagem proposicional standard* $\mathcal{L}$ construída de maneira usual. $\mathcal{L}$ possui, entre seus símbolos, os elementos de um conjunto de *variáveis proposicionais* $Var = \{p_0, p_1, p_2, ...\}$; os *conectivos*: $\neg$ (negação), $\wedge$ (conjunção), $\supset$ (implicação) e $\vee$ (disjunção); e símbolos de *parênteses*: (e). O conjunto For das *fórmulas* de $\mathcal{L}$ é o menor conjunto de expressões de $\mathcal{L}$ que contém Var e tal que valem as seguintes condições:

i. se $\alpha \in For$, então $\neg\alpha \in For$;

ii. se $\alpha, \beta \in For$, então $(\alpha \wedge \beta) \in For$;

iii. se $\alpha, \beta \in For$, então $(\alpha \supset \beta) \in For$;

iv. se $\alpha, \beta \in For$, então $(\alpha \vee \beta) \in For$

[8] Ver Goldblatt 2006 páginas 96 e 114-115.

ISSN: 2317-9570

Um modo usual de se fazer semântica para $\mathcal{L}$ é por meio do conceito de matriz e valoração. Apresento uma versão simplificada desses conceitos que servirá para contextualizar as construções que se seguem.

Uma *matrix* para $\mathcal{L}$ é uma tripla

$$M = \langle Val, t, \{f_\neg, f_\wedge, f_\supset, f_\vee\}\rangle$$

em que Val é um conjunto, $t \in Val$, $f_\neg : Val \to Val$ e $f_\wedge, f_\supset, f_\vee : Val \times Val \to Val$.

Dado uma matriz M para $\mathcal{L}$ dizemos que $v : For \to Val$ é uma *valoração* para $\mathcal{L}$ se valem as seguintes condições:

i. $v(\neg\alpha) = f_\neg(v(\alpha))$;

ii. $v(\alpha \wedge \beta) = f_\wedge(v(\alpha), v(\beta))$;

iii. $v(\alpha \supset \beta) = f_\supset(v(\alpha), v(\beta))$;

iv. $v(\alpha \vee \beta) = f_\vee(v(\alpha), v(\beta))$.

Se α é uma fórmula de $\mathcal{L}$, dizemos que α é *M-válida*, em símbolos $M \models \alpha$, se $v(\alpha) = t$ para toda M-valoração v.

Em um ambiente categorial $\mathcal{E}$ (digamos um topos), uma matriz com base em $\mathcal{E}$ é uma tripla

$$M = \langle \mathcal{E}(1,\Omega), \top : 1 \to \Omega, \{f_\neg, f_\wedge, f_\supset, f_\vee\}\rangle$$

em que $\mathcal{E}(1,\Omega)$ é a classe dos morfismos de 1 no classificador de subobjetos, $\top : 1 \to \Omega$ é seu morfismos associado e $f_\neg : \Omega \to \Omega$ e $f_\wedge, f_\supset, f_\vee : \Omega \times \Omega \to \Omega$ são morfismos a serem definidos.

Vou mostrar que esses morfismos podem ser definidos em categorias $\mathcal{E}$ que são mais gerais que topos de tal modo que temos uma noção de $\mathcal{E}$-validade que implica a existência de uma lógica associada à $\mathcal{E}$.

4. Categorias com morfismos verdade

Passo, então, a introduzir um tipo de categoria em que os morfismos $f_\neg$, $f_\wedge$, $f_\supset$ e $f_\vee$ podem ser definidos. (Na realidade, as definições são as mesmas que encontramos para topos. A diferença é que a categoria de base é mais geral.)

Definição 2 *Uma categoria $\mathcal{E}$ é denominada uma* ***categoria com morfismos verdade*** *(CTM) se as seguintes condições forem satisfeitas:*

CTM1. $\mathcal{E}$ é finitamente completa;

CTM2. $\mathcal{E}$ é finitamente cocompleta;

CTM3. $\mathcal{E}$ tem classificador de subobjetos;

CTM4. (0-AXIOMA). Em $\mathcal{E}$, se existe um morfismo $a \xrightarrow{f} 0$ (0 é inicial em $\mathcal{E}$), então f é um isomorfismo[9]*.*

Vou introduzir uma nomenclatura padrão. Se a é um $\mathcal{E}$-objeto,

[9]A propriedade fundamental das categorias cartesianas fechadas mencionada acima torna-se o 0-Axioma das CTM's.

então um morfismo $1 \to a$ (1 é terminal em $\mathcal{E}$) é dito um *elemento* de a. Nessa direção, o classificador de subobjetos Ω será denominado o *objeto valor de verdade* e $\top : 1 \to \Omega$ é um elemento de Ω dito o valor de verdade *verdadeiro*.

Como dito acima, uma consequência do 0-Axioma é que, em uma CTM $\mathcal{E}$, um morfismo do tipo $0 \to a$ é um monomorfismo, Assim, usando o Ω-Axioma, fica definido um $\mathcal{E}$-morfismo $\perp : 1 \to \Omega$ que é o caráter de $0_1 : 0 \rightarrowtail 1$. (Ver diagrama.)

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{0_1} & 1 \\ {\scriptstyle 0_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \chi_{0_1} = \perp} \\ 1 & \xrightarrow[\top]{} & \Omega \end{array}$$

Observe que nada impede que $\top = \perp$. Mas, nesse caso, temos que $\mathcal{E}$ é uma categoria degenerada (todos os objetos de $\mathcal{E}$ são isomorfos entre si). O morfismo $\perp : 1 \to \Omega$ é um elemento de Ω dito o valor de verdade *falso*.

Se a é um $\mathcal{E}$-objeto, denotamos por

$$\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ vezes}} = a^n$$

o produto de n cópias de a (n é um número natural positivo). Dado uma CTM $\mathcal{E}$, um *morfismo verdade* em $\mathcal{E}$ é qualquer morfismo do tipo $\Omega^n \to \Omega$ para algum natural positivo n. (Note que Ω^n não é um exponencial em $\mathcal{E}$.)

Vou mostrar que, em uma CTM $\mathcal{E}$, os morfismos verdade que correspondem à negação, conjunção, implicação e disjunção podem ser definidos de modo usual (em topos).

Seja $\mathcal{E}$ uma CTM com classificador $\top : 1 \to \Omega$. Definimos os seguintes morfismos verdade:

1) $f_\neg : \Omega \to \Omega$ é o caráter de $\perp : 1 \to \Omega$. O morfismo $f_\neg$ é dito o morfismo *negação*.

2) $f_\wedge : \Omega \times \Omega \to \Omega$ é o caráter do morfismo produto $\langle \top, \top \rangle : 1 \to \Omega \times \Omega$. O morfismo $f_\wedge$ é dito o morfismo *conjunção*.

3) $f_\supset : \Omega \times \Omega \to \Omega$ é o caráter do equalizador $e :\rightarrowtail \Omega \times \Omega$ dos morfismos $f_\wedge$ e pr_1 (a primeira projeção do produto). Note que, em qualquer categoria, equalizadores são monomorfismos. O morfismo $f_\supset$ é dito o morfismo *implicação*.

4) $f_\vee : \Omega \times \Omega \to \Omega$ é o caráter da imagem do morfismo coproduto $f = [\langle \top_\Omega, 1_\Omega \rangle, \langle 1_\Omega, \top_\Omega \rangle] : \Omega + \Omega \to \Omega \times \Omega$. O morfismo $f_\vee$ é dito o morfismo *disjunção*.

Cabe mencionar nesse ponto que em CTM's é possível definir para cada morfismo $f : a \to b$ o morfismo imagem de f dado por $f(a) \stackrel{imf}{\to} b$ construído por meio de um equalizador de um pushout de f por f, isto é, um equalizador de um colimite do diagrama $b \stackrel{f}{\leftarrow} a \stackrel{f}{\to} b$.

Com os morfismos verdade assim definidos, podemos mostrar

ISSN: 2317-9570

como os mesmos agem quando aplicados aos valores de verdade $\perp$ e $\top$. Os resultados dessas ações são reunidos nas tabelas usuais de verdade com uma única exceção.

Para o morfismo negação, temos a tabela:

x	$f_\neg \circ x$
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$

Para os outros morfismos verdade temos:

Para a conjunção

x	y	$f_\wedge \circ \langle x, y\rangle$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Para a implicação

x	y	$f_\supset \circ \langle x, y\rangle$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$

Para a disjunção

x	y	$f_\vee \circ \langle x, y\rangle$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\perp$	?

Assim, restaria a prova de que $f_\vee \circ \langle \perp, \perp\rangle = \perp$.

A fim de se obter esse resultado, tive que fortalecer a noção de categoria com morfismos verdade adicionando mais dois axiomas.

5. Proto-topos

Passo, então, a definir um tipo de categoria que é uma CTM com axiomas adicionais, mas que não se constitui em um topos. Ainda é matéria de investigação, se esses axiomas adicionais podem ser obtidos em categorias com morfismos verdade.

Definição 3 *Uma categoria $\mathcal{E}$ é denominada um* ***proto-topos*** *se as seguintes condições forem satisfeitas*[10]*:*

PT1. $\mathcal{E}$ é uma CTM;

PT2. Em $\mathcal{E}$, pullbacks preservam epimorfismos;

PT3. Em $\mathcal{E}$, coprodutos preservam pullbacks.

Usando (PT2), pode-se demonstrar o seguinte resultado[11]:

Em qualquer proto-topos $\mathcal{E}$, se o diagrama

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\text{f}} & b \\ u\downarrow & & \downarrow v \\ c & \xrightarrow[\text{g}]{} & d \end{array}$$

é um quadrado pullback, então existe um morfismo $h : f(a) \to g(c)$

[10]Os axiomas adicionais correspondem aos Fatos 1 e 2 da seção *Topos*.

[11]Ver Goldblatt 2006, páginas 149-150.

que torna o quadrado da direita do diagrama

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "u"'] & f(a) \arrow[r, "im(f)"] \arrow[d, "h"] & b \arrow[d, "v"] \\ c \arrow[r, "g^*"'] & g(c) \arrow[r, "\mathrm{im(g)}"'] & d \end{tikzcd}$$

um quadrado pullback.

Com o lema e o axioma (PT3), pode-se demonstrar o resultado que falta para o morfismo disjunção.

Assim, em um proto-topos $\mathcal{E}$, o comportamento de $f_\vee$ com respeito aos valores de verdade $\top$ e $\bot$ é dado pela seguinte tabela.

x	y	$f_\vee \circ \langle x, y \rangle$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

que corresponde à tabela usual da disjunção na lógica proposicional clássica.

6. Algumas questões

Concluo o texto com um levantamento de questões que têm o objetivo de conduzir o trabalho na direção de um estudo sobre os ambientes categoriais mais gerais que são capazes de fornecer semântica para linguagens proposicionais usuais, nas linhas apontadas acima.

Questão 1 *O primeiro ponto a ser investigado é se os axiomas de proto-topos já são válidos nas categorias com morfismos verdade. Se esse for o caso, é claro que as CTM's já constituiriam o ambiente categorial suficiente para a definição dos morfismos verdade com as propriedades desejadas.*

Questão 2 *Outro problema relacionado com a questão acima é se, nas CTM's, vale um teorema análogo ao teorema fundamental da teoria de topos. Se $\mathcal{E}$ é uma categoria com morfismos verdade e a é um $\mathcal{E}$-objeto, então a categoria slice $\mathcal{E} \downarrow a$ é também uma categoria com morfismos verdade. A mesma questão também para os proto-topos.*

Questão 3 *Já é um resultado bastante conhecido que as sentenças válidas em todos os topos são exatamente as teses da lógica intuicionista. Como todo topos é uma CTM ou um proto-topos, será que o resultado continua valendo ou teríamos uma lógica intermediária entre a lógica clássica e a lógica intuicionista?*

Questão 4 *Encontrar exemplos de CTM's ou de proto-topos que não são topos e também não são bivalentes. A categoria $SET^{\leq \aleph_0}$ dos conjuntos no máximo enumeráveis é um exemplo de CTM que não é um topos mas que é bivalente, seu classificador de subobjetos é o classificador usual de SET que possui dois elementos.*

ISSN: 2317-9570

Questão 5 *Desenvolver em categorias com morfismos verdade ou proto-topos o conceito de álgebra de subojetos.*

Referências

ARBIB, M. A. e MANES, E. G. (1975). *Arrows, structures, and functors: The categorical imperative*. Academic Press.

ARTIN, M., GROTHENDIECK, A. e VERDIER, J. L. (1972). Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4). *Lecture Notes in Mathematics*, vol 269.

AWODEY, S. (2010). *Category theory*. Oxford University Press.

BELL, J. L. (2008). *Toposes and local set theories: an introduction*. Courier Corporation.

BOILEAU, A. e JOYAL, A. (1981). La logique des topos. *The Journal of Symbolic Logic*, vol 46(1), pp 6-16.

FREYD, P. (1972). Aspects of topoi. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, vol 7, pp 1-76.

GOLDBLATT, R. (2006). *Topoi: the categorical analysis of logic*. Dover Publications, Inc.

HEYTING, A. (1966). *Intuitionism*. 2nd revised edition. North-Holland.

HERRLICH, H. e STRECKER, G. E. (1973). *Category theory*. Allyn and Bacon Inc.

JOHNSTONE, P. T. (1977). *Topos theory*. Academic Press.

JOHNSTONE, P. T. (2002). *Sketches of an elephant: A topos theory compendium*, 2 vols. Oxford University Press.

KOCK, A. e WRAITH, G. C. (1971). *Elementary toposes*. Aarhaus Lecture Note Series, 30.

LAWVERE, F. W. (1964). An elementary theory of the category of sets. *Proceedings of the national academy of sciences*, vol 52(6), pp 1506-1511.

LAWVERE, F. W. (1970). Quantifiers and sheaves. *Actes du congres international des mathematiciens, Nice*, vol 1, pp 329-334.

MACLANE, S. (1971). *Categories for the working mathematician*. Springer-Verlag.

MACLANE, S. e MOERDIJK, I. (2012). *Sheaves in geometry and logic: A first introduction to topos theory*. Springer-Verlag.

MACLARTY, C. (1995). *Elementary categories, elementary toposes*. Clarendon Press.

PARÉ, R. (1974) Co-limits in topoi. *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol 80(3), pp 556-561.

TIERNEY, M. (1972). Sheaf theory and the continuum hypothesis. *Toposes, algebraic geometry and logic*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag. Pp 13-42.