



## Análise da Precessão do Periélio de Mercúrio via Potencial de Manev

Daniel Back\*

*Universidade de Brasília, Faculdade Gama*

Um dos grandes triunfos da teoria da Relatividade Geral de Einstein foi o cálculo da precessão do periélio de Mercúrio, entretanto, para calcular tal anomalia na órbita desse planeta são necessárias ferramentas matemáticas sofisticadas. Porém, é possível interpretar essa correção relativística à luz da teoria gravitacional de Newton. A partir do estudo do teorema de Bertrand, as órbitas dos planetas não são fechadas, e do potencial de Manev um termo é introduzido na equação do potencial gravitacional Newtoniano que possibilita a análise da precessão do periélio de Mercúrio usando a teoria de newtoniana.

Keywords: Potencial de Manev, órbitas planetárias, Periélio de Mercúrio

### I. INTRODUÇÃO

A astronomia vem atraindo a humanidade desde os tempos mais remotos, as hipóteses sobre a natureza e a origem do Universo estão ligados com os tempos pré-históricos, e é por isso que a astronomia pode ser considerada a mais antiga das ciências.

Após vários séculos de pesquisa sobre o movimento das estrelas, Newton, baseado nos estudos de Kepler, publica Principia[2], a ideia central está atrelada ao fato de que o movimento planetário era regido pelo inverso da distância ao quadrado.

A lei da gravitação Newtoniana foi usada pelo astrônomo francês Le Verrier para localizar a posição de uma massa que perturbava a órbita de Urano, após observações astronômicas baseadas nessa teoria foi possível localizar com precisão o período, distância do Sol, excentricidade- o planeta Netuno. Em 1859, Le Verrier começou a estudar a órbita de Mercúrio e concluiu que a órbita estava precedendo lentamente. [18]

Com isso, Le Verrier sugeriu que haveria um planeta movendo-se entre Mercúrio e Sol, este planeta seria chamado de Vulcano, porém após inúmeras observações astronômicas, nenhum planeta foi encontrado. [3]

Outro problema relacionado com a precessão do periélio de Mercúrio foi que ao estimar o atraso da órbita, esse valor foi calculado precisamente por Newcomb em 1895 e é de  $42,98 \pm 0,04$  arcos de segundo por século que não era explicado pela teoria da gravitacional de Newton. [4].

Esse mistério só foi resolvido por Einstein em 1915 com o advento da Relatividade Geral, pois por meio desta teoria foi possível esclarecer com precisão o valor residual.

Einstein ao propor uma correção para as leis do movimento explicou o motivo da precessão. [4].

Assim, o físico búlgaro Georgi Manev, a partir da segunda década do século passado, descreveu os resultados da relatividade geral de maneira mais simples, usando assim o potencial, onde  $k$  e  $C$  são constantes:

$$V_m = -\frac{k}{r} - \frac{C}{r^3}$$

Os cálculos de Manev mostram resultados que não são encontrados na teoria gravitacional de Newton, e os mesmos são importantes, uma vez que é possível fazer previsões teóricas, em concordância com as observações, dentro da mecânica clássica, de modo mais simples e transparente. [5] Prova disso é que vários problemas em astrofísica, como o colapso de uma esfera homogênea [6], podem ser modelados com o potencial de Manev. Assim esse potencial pode ser interpretado como uma ponte entre a mecânica Newtoniana e a Relatividade Geral. Apesar dos exemplos citados acima, é importante ressaltar que nem todos os fenômenos da Relatividade Geral podem ser explicados usando o potencial de Manev.

O artigo está disposto da seguinte maneira: na seção 2 a equação diferencial da órbita será deduzida. Na seção 3 tal equação será resolvida para o potencial gravitacional newtoniano. Na seção 4 serão exploradas as condições para órbitas fechadas. O estudo do Teorema de Bertrand será feito na seção 5. A explicação do potencial de Manev e algumas aplicações serão expostas na seção 6. Na seção 7 é feito o cálculo da precessão do periélio de Mercúrio. E na última seção, serão apresentadas as conclusões.

\* danielback.trindade@gmail.com

## II. EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA ÓRBITA

O problema do movimento de uma partícula num potencial central, esse tipo de potencial entral, esse tipo de potencial depende da apenas de constantes e da distância radial, é um aplicação das leis de movimento que foi resolvida por Isaac Newton no Principia para o caso do potencial gravitacional. [6]

O problema do movimento de uma partícula num potencial central, esse tipo de potencial depende da apenas de constantes e da distância radial, é um aplicação das leis de movimento que foi resolvida por Isaac Newton no Principia para o caso do potencial gravitacional. [6]

Devido à simetria do problema, é adequado usar coordenadas esféricas  $r, \theta, \phi$ , definidas por:  $x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \phi$ ,  $z = r \cos \theta$ . As componentes cartesianas da velocidade em termos das coordenadas esféricas são:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \sin \theta \cos \phi + r \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta \sin \phi + r \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + r \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi \\ \dot{z} &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (1)$$

Dessa maneira a Lagrangiana do sistema tem a seguinte forma:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(r) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - V(r) \quad (2)$$

Onde  $V(r)$  é o potencial da força central  $\mathbf{F}$ . A equação acima pode ser obtida pelo vetor velocidade em coordenadas esféricas:  $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\mathbf{e}_\phi$ .

A força gravitacional tem a mesma direção que o vetor posição  $\mathbf{r}$ , dessa maneira o torque em relação à origem do sistema adotado é zero e o momento angular  $\mathbf{l} = \mathbf{v} \times \mathbf{p}$  é um vetor constante. Como  $\mathbf{l}$  é ortogonal ao plano definido por  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{p}$ , o movimento ocorre no plano perpendicular ao vetor  $\mathbf{l}$ . Escolhendo o eixo  $z$  paralelo a  $\mathbf{l}$ , o movimento no plano  $z = 0$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$  [7]. Assim, o sistema de coordenada adotado pode ser simplificado para um sistema polar no plano  $xy$ , dessa maneira a equação (3) pode ser reescrita:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - V(r) \quad (3)$$

As equações de Lagrange são:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 = F(r) \quad (4)$$

$$\frac{d(mr^2\dot{\phi})}{dt} = 0 \quad (5)$$

A equação (6) tem a seguinte solução:

$$mr^2\dot{\phi} = L = \text{constante} \quad (6)$$

Essa solução corresponde à Segunda Lei de Kepler: a linha que une o Sol a cada planeta varre áreas iguais em tempos iguais. A constante  $L$ , é conhecida como módulo do momento angular.

Na equação (6) podemos substituir o tempo  $t$  pelo ângulo  $\phi$  como variável independente na equação (5). Assim a equação (6) tem a seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} = \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\phi} \quad (7)$$

A equação (5) se torna

$$\frac{L^2}{mr^2} \frac{d}{d\phi} \left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} \right) - \frac{L}{mr^3} = F(r) \quad (8)$$

Esta equação por ser simplificada pela substituição  $u = 1/r$ , que coloca a equação acima na seguinte forma:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = -\frac{m}{L^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right) \quad (9)$$

A equação acima é a equação diferencial da trajetória da órbita e é útil para encontrar a lei de força que fornece uma órbita particular  $u = u(\phi)$ .

## III. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DA ÓRBITA PARA O POTENCIAL GRAVITACIONAL

Considerando que uma partícula de massa  $m$  é sujeita à força gravitacional  $F(r) = -K/r^2$ , onde  $K = GMm$ . A energia potencial da partícula devido a esta força é:

$$V(r) = -\int_{\infty}^r -\frac{K}{\tau^2} d\tau = -\frac{K}{r} \quad (10)$$

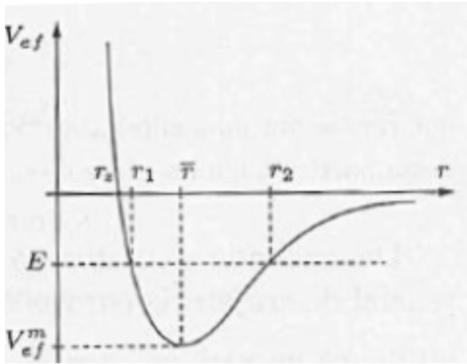
Para um determinado  $L$ , a energia potencial efetiva, soma da energia potencial com o termo de energia associado com o momento angular, [8] tem a seguinte forma:

$$V_{ef}(r) = -\frac{K}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \quad (11)$$

Nos dois extremos do intervalo de  $r$ , a energia potencial efetiva assume os valores  $\lim_{x \rightarrow 0} V_{ef}(r) = \infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} V_{ef}(r) = 0$ .

Tal função apresenta uma única raiz no ponto  $r = L^2/(2mK)$ . Dessa forma, o  $V_{ef}(r)$  deve tender a zero pelos valores negativos quando assume valores grandes, isso indica a existência de um valor mínimo entre os pontos  $r$  e  $\infty$ . No ponto  $\frac{dV_{ef}}{dr} = 0$  ocorre o mínimo, isto é, em  $\bar{r} = \frac{L^2}{mK}$ , e o valor da energia potencial efetiva nesse ponto é  $V_{ef}^m(\bar{r}) = V_{ef} = -\frac{mK^2}{2L^2}$ . O esboço do gráfico da

Figura 1: Gráfico da energia potencial efetiva. Mecânica Clássica. Watari. Vol.2. Pág 50



função para o potencial gravitacional clássico é representado pela figura abaixo:

A energia mecânica do sistema em estudo é definida pela soma da energia cinética com a energia potencial efetiva e é dada pela seguinte equação

$$E = T + V_{ef} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + V_{ef}(r) \quad (12)$$

A equação acima pode ser reescrita como

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m}[E - V_{ef}(r)] \quad (13)$$

A partícula se move em uma região que a restrição  $E \geq V_{ef}$  deve ser satisfeita. Os pontos onde  $E = V_{ef}$  são chamados de pontos de retorno, assim a equação pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{r^2} - \frac{2mK}{L^2} \frac{1}{r} - \frac{2mE}{L^2} = 0 \quad (14)$$

E tem soluções

$$\frac{1}{r_1} = \frac{mK}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}$$

e

$$\frac{1}{r_2} = \frac{mK}{L^2} - \sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}}$$

A raiz  $r_1$  é a distância de maior aproximação da partícula ao centro da força, já a raiz  $r_2$  tem uma restrição, pois só existe quando  $V_{ef}^m \leq E \leq 0$  e corresponde à distância de maior afastamento.

Considerando o eixo polar, tem-se que a direção de maior aproximação ocorre em  $\phi = 0$ , a equação diferencial da trajetória para a força em estudo fica:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = \frac{mK}{L^2} \quad (15)$$

A solução geral da equação acima é:

$$u(\phi) = A \cos \phi + B \sin \phi + \frac{mK}{L^2}$$

Uma das condições iniciais para  $u(\phi)$  é dada por:

$$u(0) = \frac{1}{r} = \frac{mK}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{mK}{L^2}\right)^2 + \frac{2mK}{L^2}} = A + \frac{mK}{L^2}$$

Outra condição inicial é  $\frac{du(0)}{d\phi} = 0$ , tal condição implica que  $B = 0$ . Portanto a equação que descreve a trajetória é dada por:

$$\frac{1}{r} = \frac{mK}{L^2} + \frac{mK}{L^2} \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{mK^2}} \cos \phi \quad (16)$$

A trajetória descrita pela equação (17) pode ser circunferência, elipse, parábola ou hipérbole, e a forma do percurso é definida pela energia mecânica. Entretanto, a primeira Lei de Kepler afirma que a órbita dos planetas é elíptica, e o Sol ocupa um dos focos, dessa maneira o estudo será voltado para esse caso.

Uma elipse possui diversos parâmetros, porém apenas o semieixo maior  $a$  e a excentricidade  $\varepsilon$  serão necessários. Para que a trajetória seja uma elipse, é necessário que a relação  $-\frac{mK^2}{L^2} < E < 0$  seja satisfeita. A equação de uma elipse tem a seguinte forma  $\frac{1}{r} = \frac{1}{a(1-\varepsilon)^2} + \frac{\varepsilon}{a(1-\varepsilon)^2} \cos \phi$ . Comparando a equação 17 com a equação da elipse, o semieixo maior é  $a = \frac{K}{2(-E)}$  e a excentricidade é  $\varepsilon = [1 + \frac{2EL^2}{mK}]^{1/2} = [1 - \frac{L^2}{mKa}]^{1/2}$

#### IV. CONDIÇÃO PARA AS ÓRBITAS FECHADAS

A força gravitacional é caracterizada por um campo central atrativo, nesse caso é possível contrabalançar tal atração por meio de uma força centrífuga ao escolher um  $L$  apropriado. A partir da expressão que define a energia potencial efetiva, a força de um sistema pode ser escrita como  $m\ddot{r} = \frac{dV_{ef}(r)}{dr}$ . Portanto, uma trajetória circular em que  $r = \bar{r}$  com  $\dot{r} = 0$  para todo  $t$  possível se  $\frac{dV_{ef}(\bar{r})}{dr} = 0$ . Como

$$\frac{dV_{ef}}{dr} = -\frac{L^2}{mr^3} + \frac{dV}{dr} = \frac{L^2}{mr^3} - F(r)$$

deve-se ter

$$\left(\frac{dV_{ef}}{dr}\right)_{r=\bar{r}} = -\frac{L^2}{mr^3} - F(\bar{r}) = 0$$

e a condição de  $r = \bar{r}$

$$-\frac{L^2}{m\bar{r}^3} = F(\bar{r}) \quad (17)$$

deve ser satisfeita para que a trajetória da partícula seja circular com um raio  $\bar{r}$ . Logo, para a equação acima ser satisfeita é necessário escolher um  $L$  e assim a trajetória será circular. Porém, nem sempre as trajetórias são estáveis, isso só ocorre quando  $V_{ef}$  tem um mínimo em  $\bar{r}$ . Assim, para ter uma trajetória estável, é necessário que duas condições abaixo sejam satisfeitas simultaneamente.

$$\begin{aligned} \frac{dV_{ef}(\bar{r})}{dr} &= 0 \\ \frac{d^2V_{ef}(\bar{r})}{dr^2} &> 0 \end{aligned} \quad (18)$$

A condição representada pela desigualdade pode ser escrita em termo de  $F(r)$  e se sua derivada com relação à  $r$  calculadas em  $\bar{r}$ . Tem-se que a segunda derivada da energia potencial efetiva é

$$\frac{d^2V_{ef}}{dr^2} \Big|_{r=\bar{r}} = \frac{3L^2}{mr^4} + \frac{d^2V}{dr^2} = \frac{3L^2}{mr^4} - \frac{dF}{dr}$$

Ao substituir  $r$  por  $\bar{r}$  na expressão acima e utilizando a equação (21) o resultado obtido é:

$$\left(\frac{d^2V_{ef}}{dr^2}\right)_{r=\bar{r}} = -\frac{3}{\bar{r}}F(\bar{r}) - \frac{dF}{dr} \Big|_{r=\bar{r}} \quad (19)$$

Dessa maneira, a existência de uma trajetória circular estável de raio  $\bar{r}$  pode se resumida à seguinte desigualdade:

$$F(\bar{r}) + \frac{\bar{r}}{3} \left(\frac{dF}{dr}\right)_{r=\bar{r}} < 0 \quad (20)$$

Ao considerar que uma partícula de massa  $m$  sob a ação de uma força central sofra uma pequena perturbação e que isso acarrete uma pequena oscilação radial cuja frequência pode ser determinada considerando a  $V_{ef}$  na vizinhança de raio igual a  $\bar{r}$ . Para um valor de  $r$  que não difere muito de  $\bar{r}$ , a energia potencial efetiva pode ser reescrita usando a Série de Taylor.

$$V_{ef}(r) = V_{ef}(\bar{r}) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2V_{ef}}{dr^2}\right)_{r=\bar{r}} (r - \bar{r})^2 + \dots \quad (21)$$

Em torno da primeira derivada não aparece nenhum termo porque  $\frac{dV_{ef}}{dr} \Big|_{r=\bar{r}} = 0$ . A componente  $r$  das

equações diferenciais que advém da segunda lei de Newton é

$$m\ddot{r} = -\frac{dV_{ef}(r)}{dr} = -m\omega_0^2(r - \bar{r}) \quad (22)$$

onde o termo  $\omega_0$  vale

$$\omega_0^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{d^2V_{ef}}{dr^2}\right)_{r=\bar{r}} \quad (23)$$

Uma mudança de variável  $\xi = r - \bar{r}$  pode ser feita, dessa maneira a equação (22) pode ser reescrita:

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0$$

A equação diferencial acima descreve um movimento harmônico simples que possui frequência  $\frac{\omega_0}{2\pi}$ . É possível inferir que a pequena oscilação da trajetória circular é harmônica e estável. Ao substituir a equação (19) na equação (23), obtêm-se uma expressão para  $\omega_0$

$$\omega_0^2 = -\frac{1}{m} \left[ \frac{3}{\bar{r}} + \left(\frac{dF}{dr}\right)_{r=\bar{r}} \right] \quad (24)$$

Desse modo o período de oscilação completa, tempo para ida e volta entre  $r_{max}$  e  $r_{min}$  pode ser expresso como:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{m} \left[ -\frac{3}{\bar{r}} - \left(\frac{dF}{dr}\right)_{r=\bar{r}} \right]^{-1/2} \quad (25)$$

Mas, ao considerar que  $r = \bar{r}$ ,  $L = mr^2\dot{\phi}$  e levando em conta a equação (17)

$$\dot{\phi} = \sqrt{-\frac{F(\bar{r})}{m\bar{r}}} \quad (26)$$

O tempo necessário para variar  $r$  de  $r_{min}$  para  $r_{max}$ , ou vice-versa, é  $\frac{\tau}{2}$  e a variação do ângulo  $\phi$  no intervalo de tempo citado é  $\Delta\phi = \psi$

$$\psi = \frac{\tau}{2} \sqrt{-\frac{F(\bar{r})}{m\bar{r}}}$$

Tendo em conta a equação (26), o ângulo apsidial (8) pode ser escrito como:

$$\psi = \pi \left[ 3 + \bar{r} \frac{F'(\bar{r})}{F(\bar{r})} \right]^{(-1/2)} \quad (27)$$

## V. TEOREMA DE BERTRAND

Uma vez que a órbita é dita limitada, a distância da partícula ao centro da força é constante, para a órbita circular, ou está compreendido entre dos valores externos  $r_{min} \leq r \leq r_{max}$ . Entretanto, uma órbita limitada não precisa ser fechada, pois a partícula pode dar várias voltas dentro do anel  $r_{min} \leq r \leq r_{max}$  sem que o caminho jamais se feche.

Assim, o teorema de Bertrand descreve que os únicos potenciais para os quais as órbitas limitadas são fechadas são  $V(r) = k/r$  e  $V(r) = kr^2$ , com  $k > 0$ , , tais potenciais correspondem a uma força que é inversamente proporcional ao quadrado da distância, um exemplo é a força gravitacional newtoniana, e a força que obedece à lei de Hooke, respectivamente. [7].

A demonstração completa do teorema de Bertrand pode ser encontrada em diversos livros como: Arnold [9] e Goldstein [10] no presente estudo, vamos explorar apenas parte dessa demonstração e tirar conclusões significativas deste teorema.

Dessa forma, seja o deslocamento angular que ocorre durante uma oscilacção radial completa, de  $r = r_{min}$  até  $r = r_{max}$  e de volta para  $r = r_{min}$ . Uma órbita limitada é fechada se, depois de um número inteiro de oscilações completas de , o ângulo de rotação varia de um número inteiro de  $2\pi$  radianos, dessa forma:  $n\psi = m2\pi$ , onde  $m$  e  $n$  correspondem a números inteiros.

Para o caso da força  $F(r) = -K/r^n$ , onde  $K > 0$  e  $n$  é um número inteiro, tem-se a seguinte relação  $F'(\bar{r})/F(\bar{r}) = -n/\bar{r}$ . Assim a equação (28) pode ser reescrita

$$\psi = \frac{\pi}{\sqrt{3-n}} \tag{28}$$

Quando  $n = 2$  o ângulo apsidal é  $\psi = \pi$ , Então a trajetória é fechada, esse resultado já era esperado, uma vez que a força em questão é atrativa e inversamente proporcional ao quadrado da distância. Quando  $n = -1$  a força que caracteriza um oscilador harmônico, o ângulo apsidal é  $\psi = \frac{\pi}{2}$ .

A distâncias planetárias, a teoria geral da relatividade introduziu uma correção proporcional a  $1/r^3$  ao potencial newtoniano, como previsto pelo teorema de Bertrand, as órbitas dos planetas não são fechadas[8], uma vez que cada planeta descreve uma elipse cujo eixo maior gira lentamente em torno do Sol[7]. Tal efeito é observado de maneira mais perceptível na órbita de Mercúrio.

## VI. POTENCIAL DE MANEV

Giorgi Manev publicou vários artigos em que propôs uma lei gravitacional não relativística capaz de esclarecer certos fenômenos dinâmicos observados no sistema solar que não são explicados pela mecânica clássica. Manev obteve seu modelo como uma consequência do princípio da

ação e reação de Max Planck [11] e considerou como um substituto para a relatividade geral. Em seus artigos ele observou que tal modelo fornecia uma boa interpretação para o movimento observado no sistema solar.

Depois de várias décadas, o modelo de Manev foi esquecido, porém, Diacu [12] pesquisou sobre o físico e começou a estudar sobre o potencial. Uma pesquisa dos artigos relacionados com as explicações de Manev para o potencial gravitacional pode ser encontradas em Haranas e Mioc [13]

A análise do movimento no campo gravitacional de Manev revelou que no sistema solar há uma aproximação teórica usando as leis de Newton com modificações pode ser tão boa quanto à da relatividade geral. Foi feita uma verificação da possibilidade do potencial de Manev modelar certos resultados na relatividade geral na mecânica Newtoniana foi feita por Ivanov e Prodanov [14].

O problema de dois corpos no potencial de Manev foi considerado por vários autores. A solução analítica do problema e o comportamento na eminência de uma colisão foram investigados por Diacu [19]. A solução das equações de movimento regularizada para diferentes condições iniciais e as hipóteses sobre regularização foram obtidas por Mioc e Stoica. [12]

O potencial de Manev tem duas constantes, para o caso do potencial gravitacional, a constante  $k$  representa  $GMm$ ,  $G$  é constante de gravitação universal,  $M$  é a massa do Sol e  $m$  a massa do planeta. Já a constante  $C$  será determinada na próxima seção.

## VII. CÁLCULO DA PRECESSÃO DO PERIÉLIO DE MERCÚRIO

Para determinar o valor da precessão do periélio de Mercúrio, é necessário fazer alterações em algumas leis da mecânica, essas mudanças foram feitas por Einstein, e alguns dos passos serão abordados neste artigo.

Nos artigos [15] Einstei introduziu duas equações de movimento com as constantes  $A$  e  $B$

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{2} + \varphi &= A \\ r^2 \frac{d\phi}{ds} &= B \end{aligned} \tag{29}$$

Onde,  $\varphi$  é o potencial gravitacional por unidade de massa,  $u$  é a velocidade,  $r$  é o raio e  $\frac{d\phi}{ds}$  é a velocidade angular onde  $ds$  é o invariante da métrica do espaço-tempo. O momento angular  $L$  e a massa  $m$  e o diferencial de tempo newtoniano podem ser rearranjados da seguinte forma:

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{L^2}{m^2 r^4}$$

Com isso, é possível fazer uma combinação das equações descritas em (29) com a equação acima, de ma-

neira que:

$$B^2 = \left(\frac{L}{mc}\right)^2$$

A fim de introduzir o termo que causa perturbação na órbita na lei de gravitação de Newton, Einstein definiu o potencial gravitacional por unidade de massa:

$$\varphi = -\frac{GM}{r} \left[1 + \frac{B^2}{r^2}\right] \quad (30)$$

Após algumas manipulações, que podem ser vistas no artigo [4], o Hamiltoniano com a perturbação no espaço Euclidiano é dado pela seguinte equação:

$$E = mA = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \left[1 - \frac{2GM}{rc^2}\right] \quad (31)$$

Dessa maneira é possível reescrever a equação (9) para o potencial considerando a precessão do periélio de Mercúrio usando a correção para o potencial gravitacional, a equação da órbita para esse cenário é dada por:

$$\frac{d^2u}{d^2\varphi} + u = \frac{GMm^2}{L^2} + \frac{3GMu^2}{c^2} \quad (32)$$

A solução para a equação da órbita sem a perturbação já foi apresentada no artigo e pode ser representada por  $u_0 = A(1 + \varepsilon \cos \varphi)$  com  $A = (a(1 - \varepsilon))^{-1}$ , onde  $a$  representa o semi eixo maior da órbita e  $\varepsilon$  representa a excentricidade da órbita. Como a perturbação orbital é muito pequena, é possível fazer uma simplificação e usar um termo de primeira ordem, logo tem-se  $u = u_0 + u_1$  e a equação (32) tem a seguinte forma:

$$\left(\frac{d^2u_0}{d^2\varphi} + u_0\right) + \left(\frac{d^2u_1}{d^2\varphi} + u_1\right) = \frac{GMm^2}{L^2} + \frac{3GM(u_0 + u_1)^2}{c^2} \quad (33)$$

Considerando apenas a parte relacionada à perturbação da órbita e que  $u_1 \ll u_0$ , pode-se negligenciar o termo  $u_1$  no lado direito da equação e usando a fórmula  $u_0 = A(1 + \varepsilon \cos \varphi)$ , tem-se que:

$$\left(\frac{d^2u_1}{d^2\varphi} + u_1\right) = \frac{3GMA^2(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2}{c^2} \quad (34)$$

Ao usar identidade trigonométrica  $\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$ , a equação acima pode ser reescrita dessa forma:

$$\left(\frac{d^2u_1}{d^2\varphi} + u_1\right) = \frac{3GMA^2}{c^2} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} + \varepsilon \varepsilon \cos \phi + \frac{\varepsilon^2}{2} \cos 2\varphi\right) \quad (35)$$

A equação (35) é linear e pode ser dividida em 3 partes  $u_1 = u_1^1 + u_1^2 + u_1^3$ , a resposta completa é:

$$\frac{3GMA^2}{C^2} \left(1 + \varepsilon \varphi \sin \varphi - \frac{\varepsilon^2 \cos 2\varphi}{6}\right) \quad (36)$$

Apenas o termo senoidal que leva à descrição de uma órbita aberta e, por conseguinte precessão do periélio é

$\varepsilon \varphi \cos \varphi$ . O ângulo que descreve a precessão da órbita é pequeno, assim é possível fazer algumas aproximações:  $\cos \varphi \approx 1$  e  $\sin \varphi \approx \varphi$ , a solução é descrita como:

$$u = A \left[1 + \varepsilon \cos \left(1 - \frac{3GMA}{c^2}\right) \varphi\right] \quad (37)$$

A precessão  $\delta$  do periélio em radianos por ano é dado por:

$$\delta = \frac{2\pi}{1 - \frac{3GMA}{c^2}} - 2\pi \quad (38)$$

Ao considerar que o denominador é muito pequeno, é possível fazer uma simplificação que pode ser escrita como:

$$\delta = 2\pi \left(1 + \frac{3GMA}{c^2}\right) - 2\pi = \frac{6\pi GMA}{c^2} \quad (39)$$

O termo  $A$  presente na equação acima é dado por  $(a(1 - \varepsilon^2))^{-1}$ , assim ao substituir na equação (39), tem-se que  $\delta = \frac{6\pi GM}{a(1 - \varepsilon^2)c^2}$ .

A precessão do periélio de Mercúrio em *arcsec* por século ( $\Delta$ ) é dado por:

$$\Delta = \delta \frac{360 \text{ graus}}{2\pi \text{radianos}} \frac{3600 \text{ arcsec}}{\text{graus}} \frac{1 \text{ órbita}}{\text{período orbital}} \frac{365 \text{ dias}}{\text{ano}} \frac{100 \text{ anos}}{\text{século}} \quad (40)$$

Ao substituir as constantes  $G$ , constante de gravitação universal ( $6.67384 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ ),  $M$ , massa do Sol ( $1.989 \times 10^{30} kg$ ),  $a$  a distância entre o Sol e Mercúrio no semi-eixo maior da órbita ( $5.791 \times 10^{10} m$ ),  $c$ , a velocidade da luz no vácuo ( $2.99792458 \times 10^8 m/s$ ),  $\varepsilon$ , excentricidade 0.2056 e o período orbital de aproximadamente 88 dias, o valor da precessão é de 42.94470 arcsec por século, valor que é confirmado pela Teoria da Relatividade Geral.

## VIII. CONCLUSÃO

O potencial de Manev é uma alternativa para representar os resultados da relatividade geral no âmbito da mecânica celestial. Por meio da análise das condições para a existência das órbitas fechadas foi possível observar resultados confirmados na literatura. [10]

O valor calculado de é resultado de uma subtração, uma vez que a precessão observada é maior, o efeito da precessão é composto por todos os corpos do sistema solar. O valor total observado é de (5600, 73 ± 0, 41) arcsec por século, sendo que as perturbações não relativísticas correspondem à (557, 62 ± 0, 20) arcsec por século. A quantidade residual que foi estudada no artigo não é prevista pela teoria Newtoniana e pode ser obtidas tanto pela teoria da Relatividade Geral, bem como pela análise do potencial de Manev. [16] [17]

Por meio do cálculo da precessão, a lei da gravitação de Newton e o potencial gravitacional clássico podem ser reescritos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 F(r) &= -\frac{GMm}{r^2} - \frac{3GML^2}{mc^2r^4} \\
 V(r) &= -\frac{GMm}{r} - \frac{GML^3}{mc^2r^3}
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

A adição de um termo inversamente proporcional à terceira potência da distância explica diversos fenômenos que não são explicados pela teoria gravitacional de Newton, porém, isso não invalida a teoria newtoniana e sim o introduz a correção relativística usando o potencial de Manev.

### REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO

- [1]: Kepler de Souza e Maria de Fátima. 2014. *Astronomia e Astrofísica*. Editora livraria de física. Página 1.
- [2]: Isaac Newton. 1687. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Royal Society, London).
- [3]: Paulo Victor e Alexandre Carlos. 2010. A precessão do Periélio de Mercúrio e a Teoria da Relatividade Geral. Mestrado em Ensino de Física.
- [4]: Randy Wayne. 2015. Explanation of The Perihelion Motion of Mercury in Terms of a Velocity-Dependent Correction to Newton's Law of Gravitation. *The African Review of Physics*.
- [5]: H.E.S. Velten e R.V. Sampaio. 2009. Órbitas fechadas e o potencial harmônico de Manev. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v.31, n. 1, 1301
- [6]: V. Ureche, Rom. Astron. 1995. J. 5, 145.
- [7]: Nivaldo A. Lemos. 2007. *Mecânica Analítica 2.ed.* – São Paulo : Editora Livraria de Física, Páginas 33.35, 38
- [8]: Kazunori Watari. *Mecânica Clássica. Vol.2* – São Paulo : Editora Livraria da Física USP. Pág 45,61,66.
- [9]: V.I.Arnold Second Edition. 1997. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer.
- [10]: Goldstein, Poole & Saffko. 2001. *Mathematical Methods of Classical Mechanics Third Edition*. Pearson.
- [11]: Maneff G. 1925. Die Gravitation und das Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung, *Z. f. Phys*, 31 p.786-806.
- [12]: Diacu F.N., Mingarelli A., Mioc V., Stoica C. 1995. The Manev two-body problem: quantitative and qualitative theory in *Dynamical Systems and Applications*, ed. R.P. Agarwal, World Scientific Series in Applicable Analysis 4, p.213-227.
- [13]: Haranas I., Mioc V. 2009. Manev potential and satellite orbits, *Rom. Astron. J.*, 19, p.,153-166.
- [14]: Ivanov R., Prodanov E. 2005. Manev potential and general relativity, in Prof. G. Manev's Legacy in *Contemporary Aspects of Astronomy, Theoretical and Gravitational Physics*, eds. V. Gerdjikov, M. Tsvetkov, Heron Press Ltd. Sofia, p. 148-154.
- [15]: A. Einstein. 1915. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* 11, 831

[16]: Weinberg, S. 1972. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, pp.198-199. New York: John Wiley & Sons, Inc.

[17]: Berman, M.S. e Gomide. 1987. F.M., *Cálculo Tensorial e Relatividade Geral Uma Introdução*. São Paulo: McGraw-Hill.

[18]: U. J. Le Verrier, *Theorie du Mouvement de Mercure*, *Annales de l'Observatoire Impirial de Paris*.V, 76, 1859.