



Mecânica Clássica no Ensino Básico: Um Estudo de Casos Particulares

Angel Akio Tateishi*

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Departamento Acadêmico de Física, Pato Branco, PR, Brazil

As frases apócrifas atribuídas a Albert Einstein conduzem os docentes de física a estarem sempre verificando as fontes e corrigindo interpretações errôneas do que Einstein realmente disse. Esse fato motivou uma reflexão similar sobre os conteúdos que são ensinados nas disciplinas introdutórias de física básica. De fato, quantas vezes se ensina algum assunto de física somente apresentando as “fórmulas”, sem verificar ou discutir suas limitações, sem mencionar as idealizações implícitas ou o porquê de serem utilizadas? Considerando o ensino do conceito de força, apresenta-se aqui uma verificação didática dos contextos mais gerais que culminam em algumas equações que compõem os famosos formulários de Física. Ou seja, a partir de contextos mais gerais, será demonstrado como algumas expressões são válidas apenas para casos particulares. O objetivo é alertar para a possibilidade de que casos particulares estejam sendo ensinados como se fossem a única descrição possível para a complexidade da realidade física — e não como modelos físicos com suas respectivas limitações.

Keywords: Mecânica Clássica. Abordagem Alternativa. Grandezas Vetoriais. Formalismo. Modelos Idealizados.

I. INTRODUÇÃO

Dentre as muitas frases atribuídas a Albert Einstein, uma muito difundida em diversos contextos é

Everything should be as simple as possible, but not simpler.[?]

De acordo com Alice Calaprice [1], essa frase é uma das quais a autoria atribuída a Einstein é sutilmente discutível, e aparenta ser uma edição ou versão simplificada da parte de uma palestra que Einstein realizou em 1933:

It can scarcely be denied that the supreme goal of all theory is to make the irreducible basic elements as simple and as few as possible without having to surrender the adequate representation of a single datum of experience.

Apesar de mais longa, essa frase é mais detalhada e menos suscetível às interpretações equivocadas. Ela está contextualizada e a autoria e referência são confiáveis e verificáveis. A primeira citação, de fato, é mais simples, mas seu significado e interpretação se tornam mais completos e menos dúbios ao conhecer a fonte original.

Quantas “fórmulas” são ensinadas, decoradas e citadas há tanto tempo que, talvez, sua origem, suas limitações ou o porquê de utilizá-las deixaram de ser alvo de curiosidade ou de escrutínio? Por exemplo, a famosa $F = ma$,

as equações da cinética, a aceleração do movimento circular $a_c = -v^2/r$, as definições de trabalho $W = Fd \cos \theta$ e do torque $\tau = Fr \sin \theta$ parecem seguir a ideia de que tudo deve ser o mais simples possível. Em geral, a física é ensinada de acordo com o suposto domínio da linguagem matemática em cada fase do ensino. Sem a linguagem do cálculo diferencial, integral e vetorial; sem a álgebra linear; sem equações diferenciais ordinárias e parciais, o ensino pode ficar reduzido às expressões mais simples que caracterizam apenas casos particulares de contextos mais gerais.

Contudo, tornar as coisas mais simples não significa necessariamente torná-las mais fáceis ou simplificadas. Repare que a frase “tornar os elementos básicos irreduzíveis tão simples e tão poucos quanto possível” vem acompanhada de “sem ter que renunciar à representação adequada de um único dado da experiência”. É por isso que as leis de Newton e as equações de Maxwell são tão importantes, não porque simplificam a descrição dos fenômenos físicos ou nossa compreensão do mundo, mas porque, a partir de poucas equações, ao interpretar o que está codificado na linguagem matemática, somos capazes de aplicá-las e adaptá-las ao estudo de diversos sistemas.

Se esquecermos que a física é ensinada por meio de modelos matemáticos (os quais possuem limitações), poderemos fazer com que, por exemplo, se confunda ou se limite o conceito de força a uma fórmula para substituir números ou às ‘flechas’ que representam empurrões ou puxões sobre blocos. Ou seja, as expressões para casos particulares podem se tornar a única descrição conhecida sobre sistemas físicos, pois muitas vezes não é

* angeltateishi@utfpr.edu.br

mentonado que a física também se aplica aos casos mais complicados ou mais próximos da realidade.

Em geral, egressas e egressos de cursos de graduação em Física possivelmente tiveram contato com disciplinas de mecânica - clássica, analítica, estatística, quântica - a partir das quais conseguem estabelecer a física básica dentro de um contexto mais abrangente, tanto matematicamente quanto em aplicações. Contudo, muitos professores e professoras das disciplinas de física podem ter outras formações de origem. Portanto, como um material de auxílio para o ensino de física, aqui é proposta uma revisão que aborde de maneira concisa e didática alguns conceitos de mecânica clássica e suas relações com o que é ensinado sobre mecânica no nível básico.

Nesse contexto, consideraremos as equações $F = ma$, $v(t) = v_0 + at$, $v = r\omega$, $a_c = -v^2/r$, $W = Fd \cos \theta$ e $\tau = Fr \sin \theta$ como sendo a nossa frase *Everything should be as simple as possible, but not simpler* e vamos procurar as ‘frases mais gerais’ a partir das quais se criou uma versão simplificada. Mostraremos como uma visão mais abrangente sobre cada uma das expressões anteriores possibilita uma melhor compreensão das limitações delas, e as possibilidades para os casos mais gerais. Ao mesmo tempo em que conceitos fundamentais sobre vetores e cálculo são abordados de maneira mais interpretativa e amigável. De fato, esse texto foi desenvolvido baseando-se na forma como o autor aborda esses assuntos em sala de aula. Por esse motivo, esse trabalho não se caracteriza como o resultado de uma pesquisa sobre ensino, mas é um reflexo da prática do ensino de física. Sempre buscando o equilíbrio entre abordar conceitos de forma simples, mas sem abandonar o rigor da linguagem matemática.

Portanto, na Seção II será abordada a segunda lei de Newton, $F = ma$; na Seção III, a tradicional definição de cinemática será discutida; já na Seção IV, mostraremos o que está implícito nas equações que descrevem os movimentos curvilíneos em duas dimensões; a Seção V mostrará os tópicos abordados nos livros após as leis de Newton, colocando impulso, trabalho e torque dentro de um contexto mais geral: as formas de multiplicar um vetor e seus conceitos. Por fim, a Seção VI será destinada à parte de discussão e conclusão.

II. SEGUNDA LEI DE NEWTON

O conceito de força é um dos pilares da física [2]. Apesar de possuir uma vasta história mesmo antes de Newton [3], é comum associar força apenas com a expressão

$$\sum F = ma, \quad (1)$$

ou com flecinhas que empurram ou puxam bloquinhos nos exercícios de física. Olhando matematicamente para a Eq.(1), nota-se que ela descreve casos particulares nos quais só existe a possibilidade de movimento de translação em uma única direção. Com apenas uma coordenada espacial evita-se a utilização da notação vetorial.

Força e aceleração são grandezas vetoriais, portanto, para movimentos em 2 ou 3 dimensões, escrevemos:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}. \quad (2)$$

Lembre-se que a aceleração representa como o vetor velocidade está variando no tempo, isto é, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$. Um vetor tem módulo e direção e essas duas propriedades podem variar no tempo[?]. Se tanto o módulo quanto a direção do vetor velocidade $\vec{v}$ não mudam conforme o tempo passa, então a derivada $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$. O ‘zero vetorial’ foi utilizado para não esquecermos que quando se tem um vetor de um lado da equação, então deve haver um vetor do outro lado. Se isso não acontecer, não podemos chamar de equação. Além disso, $\vec{0}$ nos diz que todos os componentes do vetor devem ser nulos.

Dito isso, podemos interpretar a equação

$$\sum \vec{F} = \vec{0} = m\vec{a}. \quad (3)$$

Para que ocorra $m\vec{a} = \vec{0}$, ou a massa é nula ($m = 0$) ou a aceleração é nula ($\vec{a} = \vec{0}$). Não faz sentido a massa ser zero, pois é por meio dela que ocorre a interação e ela representa a massa inercial (sem massa, sem inércia). Só resta a aceleração ser nula. Para isso ocorrer, o vetor velocidade deve ser constante tanto em módulo quanto em direção. Uma direção constante significa uma trajetória retilínea, e o módulo constante significa que ele é uniforme. Ou seja, um objeto tende a permanecer em movimento retilíneo uniforme, a menos que uma força resultante não nula atue nele, alterando seu vetor velocidade.

É importante lembrar que aceleração e velocidade são vetores, pois é comum interpretarmos esses termos de acordo com o nosso senso comum. Por exemplo, no caso de veículos, acelerar significa aumentar o módulo da velocidade (o que é mostrado no velocímetro). Fazer uma curva com o velocímetro fixo em algum valor ou pisar no freio geralmente não são interpretados no senso comum como aceleração. Na física, se o vetor velocidade mudar de direção com o tempo, o movimento é caracterizado como acelerado. Trajetórias curvilíneas são consequências de movimentos acelerados.

Outra particularidade da Eq.(2) é sua validade somente no caso em que a massa m é constante. Na sua forma mais geral, a segunda lei de Newton é descrita como a variação do momento linear $\vec{p} = m\vec{v}$ em relação ao tempo t ,

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}). \quad (4)$$

Utilizando a regra da derivada de um produto, temos

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}, \quad (5)$$

onde observa-se que além da variação de velocidade, temos que considerar a influência da variação de massa

em relação ao tempo, conforme ilustrado na Fig.(1) Se a massa m for constante no tempo, então $\frac{dm}{dt} = 0$ e a Eq.(2) é recuperada. O outro caso particular seria se o vetor velocidade for constante, mas a massa é variável no tempo. Esse não é trivial, pois teríamos um movimento retilíneo uniforme ($vecv$ constante) no qual a força acrescentaria ou removeria massa do sistema de tal forma a sempre manter a mesma velocidade.

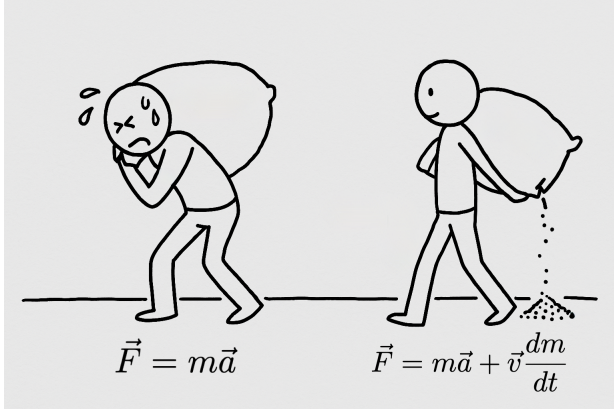


Figure 1. Quando $F=ma$ não é suficiente: carregar um saco furado significa lidar com massa variável. À esquerda, o caso com massa constante — $\vec{F} = m\vec{a}$. À direita, sistema com massa variável, $\vec{F} = m\vec{a} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$, onde o segundo termo representa a variação do momento devido à perda de massa.

Tratar a massa constante faz sentido, principalmente quando já estamos considerando que toda a massa do objeto está restrita a um único ponto do espaço, isto é, usando a aproximação de *partícula*. Um ponto tem dimensão zero, ou seja, não possui largura, altura e profundidade. Então, em termos de graus de liberdade de um objeto, as forças que atuam em uma partícula podem apenas causar movimentos de translação. Falar de deformações e rotações causadas por forças só faz sentido se considerarmos que o objeto possui uma extensão no espaço, e isso um ponto não tem. Essa aproximação de um objeto sendo tratado como uma partícula é importante, pois sempre é possível calcular o centro de massa de um objeto e assim simplificar o estudo do movimento de translação[?], ao considerar que todas as forças estão atuando diretamente no centro de massa. Contudo, forças também podem causar rotação. Nesse caso a forma do objeto, como sua massa está distribuída no volume, localização onde a força é aplicada e o eixo de rotação são informações que não podem ser desprezadas. Para diferenciar os movimentos de translação e rotação e suas respectivas velocidades e acelerações, utilizamos o adjetivo *linear* para movimentos de translação (velocidade linear $\vec{v}$, aceleração linear $\vec{a}$); e o adjetivo *angular* para movimentos de rotação (velocidade angular $\vec{\omega}$, aceleração angular $\vec{\alpha}$).

Aqui estamos nos referindo apenas a objetos sólidos, quando analisamos fluidos já não temos uma forma definida e então é preferível utilizar a densidade

volumétrica de massa $\rho = \frac{m}{V}$, ao invés da massa total. Outra característica é que a velocidade do fluido, além de poder variar no tempo, poderá variar em relação ao espaço. Nesse caso é comum descrever aceleração com o símbolo de derivada material D/Dt , ou seja,

$$\vec{a}(\vec{r}, t) = \frac{D}{Dt} \vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}. \quad (6)$$

Sendo $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ a variação do campo vetorial de velocidade em relação ao tempo e $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ a variação do campo vetorial de velocidade em relação às coordenadas espaciais.

III. CINEMÁTICA

Em geral, a cinemática é descrita como a parte da física que descreve o movimento dos corpos sem se preocupar com a análise do que causou o movimento [4]. Contudo, essa definição parece contraditória, pois a cinemática muitas vezes se pré-ocupa apenas com os casos em que a causa do movimento é uma força constante.

Suponha um caso unidimensional, no qual apenas uma força F_c (constante) está atuando em uma partícula de massa m . A segunda lei de Newton para esse caso é

$$F_c = ma = m \frac{dv}{dt}. \quad (7)$$

Como a Eq.(7) tem um sinal de igual e derivadas, chamamos ela de uma equação diferencial. Como estamos considerando que a função velocidade depende só do tempo, então a derivada é chamada de ordinária. Portanto, temos uma *equação diferencial ordinária*. Podemos reescrever a Eq.(7) da seguinte forma:

$$dv = \left(\frac{F_c}{m} \right) dt. \quad (8)$$

Leia "dv" como uma *pequena variação*[?] *de velocidade*, e esta é diretamente proporcional a uma *pequena variação de tempo* dt. Ou seja, quanto mais tempo considerarmos, maior será a variação da velocidade. Além disso, dv é proporcional à força F_c (quanto maior a força, maior a variação de velocidade) e inversamente proporcional à massa[?] m (quanto maior a massa, menor a variação de velocidade, e vice-versa).

Se somarmos todas as infinitesimais variações dv desde uma velocidade inicial no tempo $t = 0$, v_0 , até uma velocidade qualquer no tempo t , teremos a variação total da velocidade $v(t)$ nesse intervalo de tempo. Isso é igual a somarmos todas as variações dt multiplicadas pelo termo F_c/m . Quando somamos variáveis discretas, utilizamos o símbolo $\sum$; quando a soma é de variáveis contínuas, usamos outro símbolo: $\int$. Por mais que integrais possam causar traumas na graduação, elas são apenas símbolos que indicam a soma de variáveis contínuas. O que acabou de ser descrito é representado por

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_0^t \left(\frac{F_c}{m} \right) dt. \quad (9)$$

Como a massa m e força F_0 são constantes, também é constante o valor de F_c/m . Como $\int_0^t dt$ soma apenas contribuições de coisas que dependem do tempo, então F_c/m pode sair de dentro da somatório:

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = \left(\frac{F_0}{m} \right) \int_0^t dt. \quad (10)$$

Resolvendo essas integrais, obtemos

$$v(t) = v_0 + \left(\frac{F_c}{m} \right) t. \quad (11)$$

Repare que do lado esquerdo temos velocidade (*comprimento/tempo*), então do lado direito cada termo, v_0 e $(F_0/m)t$, também devem ter dimensão de velocidade. Como t é tempo, F_c/m deve obrigatoriamente ter dimensão física de *comprimento/(tempo)²*, também conhecido como aceleração. Portanto podemos definir

$$\frac{F_c}{m} = a_c. \quad (12)$$

Utilizando a definição anterior na Eq.(11) temos uma das equações da cinemática:

$$v(t) = v_0 + a_c t. \quad (13)$$

A partir disso podemos obter a função que descreve a posição x para qualquer tempo t . Basta considerar a definição de velocidade como a posição variando no tempo, isto é,

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 + a_c t. \quad (14)$$

Reescrevendo na forma de pequenas variações,

$$dx = (v_0 + a_c t) dt, \quad (15)$$

observamos que uma variação infinitesimal da posição dx é proporcional a uma pequena variação de tempo dt . Além disso, dx também depende da velocidade atual em cada tempo t , ou seja, é proporcional ao termo $v_0 + a_c t$. A soma de todas as variações nos dois lados da Eq.(15) é representada pelas integrais

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t (v_0 + a_c t) dt, \quad (16)$$

cujo o resultado final é a conhecida equação da posição:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2. \quad (17)$$

A posição em qualquer tempo t é a soma da posição inicial x_0 com o quanto foi percorrido devido à velocidade inicial ($v_0 t$) e devido à variação de velocidade nesse tempo ($\frac{1}{2} a_c t^2$).

Os resultados das Eqs. (11) e (17) são válidos para quaisquer forças constantes. Por exemplo, suponha que

o eixo considerado é vertical e a força atuando é a força peso, nesse caso temos $F_c = -mg$. Substituindo isso na Eq.(12),

$$\frac{-mg}{m} = a_c = -g. \quad (18)$$

Dessa forma, recuperamos as equações de queda livre: $v(t) = v_0 - gt$ e $y(t) = y_0 + v_0 t - (1/2)gt^2$.

A força pode depender do tempo, por exemplo $F(t) = F_0 t$ (força que aumenta linearmente com o tempo), ou uma força que diminui exponencialmente $F(t) = F_0 e^{-bt}$. Nesses casos a integral do lado direito da Eq.(9) seria diferente, e teríamos outros resultados de comportamento de velocidade e posição em função do tempo. Também temos os casos em que mais de uma força está atuando, como no caso de uma queda considerando a resistência proporcionada pelo ar. Quanto mais interações consideramos, mais complicadas ficam as equações diferenciais. Mas a versatilidade da segunda lei de Newton é que se soubermos as forças que atuam em um objeto, e se soubermos resolver equações diferenciais, podemos obter as funções que descrevem o comportamento da velocidade e da posição.

Portanto, talvez uma definição mais apropriada seria que a cinemática é o ramo da física que não se preocupa com movimentos causados por forças dependentes do tempo e que se restringe às coordenadas cartesianas.

IV. SEGUNDA LEI DE NEWTON PARA O MOVIMENTO CURVILÍNEO

Em coordenadas cartesianas os vetores unitários e ortogonais (versores $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$) que formam a base vetorial são fixos. Nas coordenadas polares, utilizadas na descrição de movimentos curvilíneos, descrevemos as posições x e y em termos do raio r e do ângulo θ . Contudo, agora a base vetorial não é mais fixa, mas acompanha a partícula em sua trajetória, conforme ilustrado na Fig.2. Isso facilita a descrição dos movimentos curvilíneos[?], contudo uma consequência é que os vetores unitários ($\hat{r}$ e $\hat{\theta}$) também irão variar no tempo. As derivadas do vetor posição e do vetor velocidade se tornam mais complicadas quando comparadas com o caso cartesiano. Assim, podemos escrever os vetores velocidade linear e aceleração linear em termos da velocidade angular e da aceleração angular. Em geral, a descrição de um problema físico pode ser simplificada com a escolha adequada de sistema de coordenadas.

A velocidade em coordenadas polares é dada por [5]:

$$\vec{v}(t) = \left(\frac{dr}{dt} \right) \hat{r} + r \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \hat{\theta}. \quad (19)$$

Aqui dr/dt descreve como o raio da trajetória muda com o tempo. A variação do ângulo com o tempo é definida como velocidade angular, $d\theta/dt = \omega$.

A velocidade possui um componente radial e outro tangencial. Para entender melhor, vamos supor dois casos

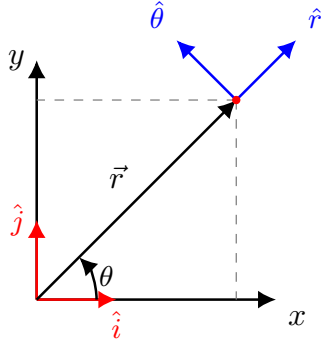


Figure 2. Representação do sistema de coordenadas polares sobreposto ao sistema cartesiano. Os vetores unitários $\hat{i}$ e $\hat{j}$ (em vermelho) representam a base fixa cartesiana. O vetor posição $\vec{r}$ aponta da origem até a partícula (ponto vermelho). Os versores $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ (em azul) formam a base móvel associada ao sistema polar, onde $\hat{r}$ aponta na direção radial e $\hat{\theta}$ é tangente à trajetória, formando um ângulo θ com o eixo x .

particulares. Primeiro, suponha que não haja variação do ângulo θ no tempo, isto é, o ângulo é constante e o objeto não gira. Nesse caso, a única forma de se mover é na direção radial, isto é, variando o raio r da trajetória (afastando-se ou aproximando-se do centro). Segundo, suponha que o raio é constante. Nesse caso, temos um movimento circular, pois a variação do ângulo θ está sempre tangenciando o raio.

Com essa compreensão, podemos reescrever $\vec{v}(t)$ da seguinte forma:

$$\vec{v}(t) = \left(\frac{dr}{dt} \right) \hat{r} + (r\omega) \hat{\theta}. \quad (20)$$

A partir disso, a aceleração (sempre definida como $\vec{a}(t) = d\vec{v}/dt$) é calculada, cujo resultado final [5] pode aparentar não ser muito amigável,

$$\vec{a}(t) = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2 \right] \hat{r} + \left[r\alpha + 2 \left(\frac{dr}{dt} \right) \omega \right] \hat{\theta}, \quad (21)$$

sendo $\alpha = d\omega/dt$ a aceleração angular, ou seja, a variação da velocidade angular em relação ao tempo. Novamente, temos componentes radiais e tangenciais da aceleração: dois termos para a aceleração na direção radial e mais dois termos de aceleração tangencial. O sinal negativo no componente radial significa que a aceleração é em direção ao centro. Essa expressão é geral e descreve a aceleração para qualquer movimento curvilíneo no qual tanto o raio quanto o ângulo estão variando no tempo.

As coisas se simplificam ao considerarmos casos particulares. O mais comum é assumir que o raio r é constante, ou seja, que o movimento é circular. Matematicamente isso implica que $dr/dt = 0$. Com isso a Eq.(20) e (21) tornam-se

$$\vec{v}(t) = 0\hat{r} + (r\omega)\hat{\theta}, \quad (22)$$

e

$$\vec{a}(t) = (-r\omega^2) \hat{r} + (r\alpha) \hat{\theta}. \quad (23)$$

A outra particularidade que podemos considerar é que a velocidade angular ω seja constante, isso significa que a partícula sempre levará o mesmo tempo para completar uma volta no círculo. Assim chegamos nas equações do movimento circular (pois r é constante) uniforme (pois ω é constante e então $\alpha = 0$):

$$\vec{v}(t) = (r\omega) \hat{\theta}, \quad (24)$$

e

$$\vec{a}(t) = (-r\omega^2) \hat{r}. \quad (25)$$

Com apenas um componente na velocidade e na aceleração podemos sempre evitar a notação vetorial. Para isso, consideramos o módulo desses vetores. Obtendo as relações conhecidas:

$$v = r\omega, \quad (26)$$

e

$$a = -r\omega^2 = -r \left(\frac{v}{r} \right)^2 = -\frac{v^2}{r}. \quad (27)$$

Por fim, a segunda lei de Newton para um movimento curvilíneo de raio e velocidade angular constantes é

$$\vec{F} = \frac{mv^2}{r} (-\hat{r}). \quad (28)$$

Nesse contexto, por mais trivial que seja, é importante lembrar que todo movimento curvilíneo é um movimento acelerado, ou seja, existe variação do vetor velocidade. No caso, a força que causa a aceleração impede que o objeto tenha um movimento retilíneo uniforme, ou seja, que o vetor velocidade seja constante $\vec{v}$. Essa tendência da força manter o movimento curvilíneo (ou, nesse caso particular, um movimento circular) sempre fazendo a partícula mudar de direção é representada pelo sinal negativo no versor $\hat{r}$.

V. IMPULSO, TRABALHO E TORQUE

Seguimos com umas perguntas simples sobre a atuação de forças em um objeto ou sistema: Por quanto tempo a força atua e qual a influência disso na variação temporal do momento linear? Qual é a relação entre o vetor deslocamento do objeto e a direção da força aplicada? Quando devemos nos preocupar com a localização no objeto na qual a força atua e o que movimentos isso pode causar? Tais perguntas são respondidas pelos conteúdos abordados após as aplicações da segunda lei de Newton, em geral, são a parte de impulso e colisões; trabalho e energia; torque e rotações. É possível sintetizá-los, ou relembrá-los com base no fato de que força é descrita matematicamente por vetores. O ponto de partida é lembrar que um vetor pode ser multiplicado de 3 formas:

- Um vetor multiplicado por um escalar, $a\vec{A}$, sendo a um escalar qualquer. O vetor mantém sua direção e apenas sofre uma transformação de escala (tamanho do módulo).
- Um vetor multiplicado por outro vetor, cujo resultado é um escalar, $\vec{A} \cdot \vec{B} = \text{escalar}$, obviamente chamado de *produto escalar*. É uma forma de ver a projeção de um vetor no outro.
- Um vetor multiplicado por outro vetor, cujo resultado é outro vetor, $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$, sendo $\vec{C}$ um vetor perpendicular ao plano formado pelos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ e que indica que uma rotação nesse plano seria indo $\vec{A}$ para $\vec{B}$. De maneira sucinta isso é a definição do *produto vetorial* que utilizo nas aulas.

Como força é uma grandeza vetorial, então podemos multiplicá-la de 3 formas também:

- Força multiplicada por um escalar, no caso o tempo t . Isso nos informa uma quantidade que considerava por quanto tempo a força atuou. Responde a pergunta: *faz diferença quanto tempo a força fica atuando no objeto?* Então temos a definição de *impulso* $\vec{I}$:

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt = \int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} d(m\vec{v}). \quad (29)$$

- Força multiplicada por um vetor deslocamento, por meio do produto escalar. Isso nos informa uma quantidade que considera para qual distância a força atuou e como ele contribuiu para esse deslocamento. Nesse caso, isso é a definição de *trabalho* W :

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (30)$$

- Força multiplicada por um vetor deslocamento, por meio do produto vetorial. Isso nos informa o plano e o sentido de uma rotação causada pela força $\vec{F}$, cujo vetor deslocamento $\vec{r}$ é o vetor que inicia no ponto de referência (geralmente a localização do eixo de rotação) e vai até onde a força $\vec{F}$ está sendo aplicada. Se considerarmos uma distribuição de força $d\vec{F}$ ao invés de forças discretas, teremos a definição de torque (ou se preferir, pode chamar de *momento* de uma distribuição de forças, onde momento é interpretado como uma média da distribuição):

$$\vec{\tau} = \int \vec{r} \times d\vec{F}. \quad (31)$$

Um sumário do exposto acima é apresentado na Fig.3.

A partir da Eq.(29), temos o conteúdo de colisões e conservação de momento linear. A partir da Eq.(30),

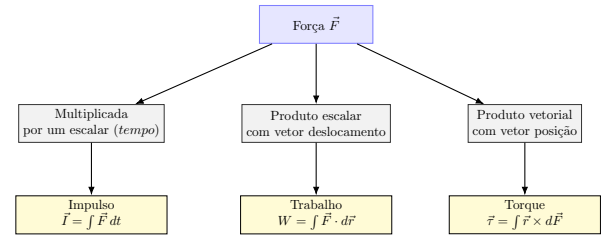


Figure 3. Diagrama que ilustra como diferentes operações matemáticas aplicadas ao vetor Força resultam em conceitos físicos fundamentais estudados nos cursos iniciais de Física Básica.

temos a parte de energia (cinética e potencial) e também o importante conceito de conservação de energia. Por último, a partir da Eq.(31) é possível desenvolver a parte de rotações de corpos rígidos[?].

As Eqs.(29) e (30) acima podem ser simplificadas se considerarmos o caso particular de forças constantes. O detalhe é que o adjetivo *constante* depende da variável de integração. Ou seja, a força é considerada constante na definição do impulso, Eq.(29), se ela não depender do tempo. Já na definição de trabalho, Eq.(30), a força é constante se não depender de nenhuma variável espacial. Não é à toa que, de acordo com o teorema da Emmy Noether [6] a conservação de momento linear é devido à invariância perante uma translação espacial; e a conservação de energia é caracterizada por uma invariância perante translações temporais. Portanto, considerando essa sutileza na definição do que é constante em cada caso, teremos que as forças podem sair das respectivas integrais:

$$\vec{I} = \vec{F} \int_{t_i}^{t_f} dt = \vec{F}(t_f - t_i) = \vec{F}\Delta t, \quad (32)$$

e

$$W = \vec{F} \cdot \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} d\vec{r} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}. \quad (33)$$

Repare que o produto escalar continua presente, pois a integral de $d\vec{r}$ continua sendo um vetor, conforme definimos por meio de $\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$ (deslocamento total $\vec{d}$). A próxima simplificação seria evitar essa notação de produto escalar. O conceito desse produto é a "sombra" ou projeção que um vetor faz no outro. Se os dois vetores são paralelos (ângulo entre eles é 0 graus), a sombra é máxima; se os dois vetores são perpendiculares (ângulo entre eles é 90 graus), não há sobreposição. Agora, qual função que conhecemos que é máxima[?] para um ângulo $\theta = 0$ e nula quando $\theta = \pi/2$? A resposta é que podemos representar o trabalho como

$$W = Fd \cos \theta. \quad (34)$$

Por sua vez, a Eq.(31) pode ser simplificada se considerarmos que as forças são discretas e constantes no

tempo, ao invés de distribuídas em uma região. Nesse caso, trocamos o símbolo da integral pelo símbolo de soma Σ , isto é,

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i. \quad (35)$$

Se houver apenas uma força atuando, o somatório terá apenas um termo. O torque resultante é um vetor perpendicular ao plano da rotação do objeto, e também indica o sentido da rotação nesse plano. Em geral, o torque é um vetor com 3 componentes, sendo cada componente perpendicular a um dos 3 planos de rotação (planos xy , yz e zx). Mas é possível evitar a notação vetorial se considerarmos apenas rotação em um plano. Se o plano é o plano xy , a rotação ou ocorre na direção de x para y ou de y para x , em ambos os casos o torque só teria o componente z (que é perpendicular ao plano xy), e então poderia ser positivo ou negativo, indicando assim o sentido da rotação. Contudo, é uma simplificação cujo preço é descartar a relação do conceito do produto vetorial com a definição matemática de planos de rotação. De qualquer forma, se a rotação está restrita em apenas um plano, o torque pode ser também definido pelo ângulo formado entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$. Lembre-se de que esses dois vetores devem formar um plano. Se os vetores forem paralelos ($\theta = 0$) eles não formam um plano (ou formam um plano cuja área do paralelogramo é nula). A área do plano será máxima quando esses vetores forem perpendiculares ($\theta = \pi/2$) e a área será rF . Qual função que conhecemos que é nula em $\theta = 0$ e máxima em $\theta = \pi/2$? Respondendo a essa pergunta, obtemos a definição:

$$\tau = Fr \sin \theta, \quad (36)$$

na qual r é chamado de braço de alavanca.

Portanto, uma desvantagem pouco mencionada é que o caso particular representado pela Eq.(36) omite que torque é um vetor[?], assim dificultando a compreensão do que é o torque, sendo coloquialmente confundido com força e não como a descrição de um movimento de rotação causado por uma força.

Esses conceitos de produto escalar e vetorial são necessários para entender matematicamente onde fica explícito que a força magnética[?], $\vec{F}_{mag} = q(\vec{v} \times \vec{B})$, não realiza trabalho. Pelo conceito de produto vetorial é fácil inferir que a força magnética é perpendicular ao plano formado pelo vetor velocidade e pelo campo magnético. O trabalho da força magnética é dado por

$$W = \int_{\vec{r}_f}^{\vec{r}_f} \vec{F}_{mag} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_f}^{\vec{r}_f} q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}. \quad (37)$$

Lembrando que o deslocamento $d\vec{r}$ e a velocidade $\vec{v}$ da carga elétrica estão relacionados por $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, podemos reescrever a equação acima como:

$$W = \int_{\vec{r}_f}^{\vec{r}_f} q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt. \quad (38)$$

Portanto, sabendo que o resultado de $\vec{v} \times \vec{B}$ é perpendicular ao vetor $\vec{v}$ e que o produto escalar quantifica a projeção de um vetor em outro, conclui-se que, por causa dessa perpendicularidade, o trabalho da força magnética é nulo. Ou seja, a força magnética sempre estará formando um ângulo de $\pi/2$ com o vetor deslocamento.

VI. DISCUSSÃO E CONCLUSÃO

Se fosse necessário simplificar a definição de força em uma única palavra que mantivesse toda a abrangência desse conceito, essa palavra seria *interação*. E o conceito de força foi o protagonista deste trabalho, juntamente com o fato de que ela é uma grandeza vetorial.

Mesmo quando o assunto foi a cinemática, vimos que as equações estudadas na cinemática são exemplos do movimento devido às forças que são constantes no tempo. Se houvesse outro tipo de interação que não fosse constante no tempo, as equações do movimento teriam modificações. Quando todas as forças que atuam em um objeto são constantes no tempo, basta somá-las vetorialmente $\sum \vec{F}$. Essa soma resultante será diretamente proporcional à massa m do objeto e poderá causar alterações no vetor velocidade que descreve o movimento do objeto, isto é, $\sum \vec{F} = m\vec{a}$. Como vimos, ao utilizar essa forma da segunda lei de Newton estamos assumindo que a massa m é constante no tempo. Então, nesse caso, achamos uma aceleração constante devido à resultante de forças constantes. A partir dessa aceleração, obtemos a função da velocidade; e a partir da velocidade obtemos a função que descreve a posição no tempo. E todas essas funções estão de acordo com as equações da cinemática.

Implicitamente, relacionamos o somatório de forças com o movimento de translação de um objeto. Forças podem causar outros movimentos além de translação, tais como rotação e deformações. Se rotações e deformações são irrelevantes, podemos tratar o objeto como uma partícula e considerar que todas as forças estão atuando no centro de massa do objeto. É importante destacar em sala de aula que forças causam outros movimentos além da translação, e que objetos podem se mover de diferentes formas ao mesmo tempo.

É claro que é possível abordar o movimento curvilíneo considerando o objeto aproximadamente como uma partícula. Nesse caso, os vetores e bases vetoriais se tornam importantes. A equação $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ é geral no sentido de que podemos adaptá-la para diferentes tipos de coordenadas. Nas coordenadas cartesianas, as coordenadas x , y e z são descritas independentes uma das outras. Contudo, no caso de um movimento circular no plano cy , existirá uma relação bem definida entre os valores das variáveis x e y . Nesse caso, coordenadas polares seriam mais convenientes. Como mostramos na Seção IV, em coordenadas polares as expressões finais para o vetor velocidade e o vetor aceleração são mais complicadas do que no caso cartesiano. A partir de casos particulares de raio constante e velocidade angular constante, mostramos

como chegar nas expressões utilizadas no ensino básico. Talvez seja difícil introduzir diferentes tipos de coordenadas em um nível mais básico do ensino; contudo, é possível mencionar que existem outras coordenadas além das cartesianas[?]. Talvez seja mais fácil explicar a aceleração do movimento circular uniforme, $a = -\frac{v^2}{r}$, dizendo que ela é uma adaptação da segunda lei de Newton para coordenadas polares. Nesse contexto, é importante destacar em sala de aula as limitações, ou seja, que essas equações só poderiam ser aplicadas se uma curva realizada for uma trajetória circular e com velocidade angular constante. As ‘exceções’ a essas particularidades são mais comuns no nosso dia a dia.

Enfatizar que forças são vetores também nos permite ter uma visão mais estruturada ou uma maneira de lembrar alguns conteúdos de mecânica. Sendo força um vetor, podemos multiplicá-la de 3 formas: por um escalar; por outro vetor, cujo resultado do produto é um escalar; por outro vetor, cujo resultado do produto é outro vetor. Tempo (uma grandeza escalar), e deslocamento (grandeza vetorial) são o que multiplicamos por força. No primeiro caso, temos o *impulso*, a força multiplicada pelo tempo de atuação dela. No segundo caso, temos a

definição de *trabalho*, isto é, o quanto a força contribui para o movimento na direção do deslocamento. No terceiro caso, temos uma maneira de descrever as rotações causadas por uma força aplicada e um objeto com extensão no espaço (isto é, não consideramos o objeto usando uma partícula).

Mostrar os quadros gerais de um conteúdo pode ser útil, pois fornece a quem está estudando um mapa do que será aprendido e as conexões entre os assuntos. Destacar as limitações e particularidades de cada conteúdo também é essencial, pois pode ajudar a desenvolver um senso crítico para avaliar as aplicações e limitações dos modelos físicos conforme forem sendo estudados.

Por fim, propõe-se uma interpretação para o termo *física básica* de acordo com as frases de Einstein mencionadas na introdução. O adjetivo *básico* que caracteriza a palavra física não significa que a física deva ser simples, simplificada ou fácil. Vamos interpretar como básico aquilo que constrói uma base, os fundamentos de alguma coisa. E é sobre esses fundamentos que se constrói todo o restante.

-
- [1] CALAPRICE, Alice. *The ultimate quotable Einstein*. 2. ed. Oxford: Princeton University Press, 2011. ISBN 9780691138176.
 - [2] JAMMER, Max. *Conceitos de força: um estudo sobre os fundamentos da dinâmica*. Rio de Janeiro: Contraponto Editora, 2011. ISBN 9788578660345.
 - [3] DIAS, Penha Maria Cardoso. $F = ma$?!! O nascimento da lei dinâmica. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 28, n. 2, p. 205–234, 2006.
 - [4] LUZ, Antônio M. R. da; ÁLVARES, Beatriz Alvarenga; GUIMARÃES, Carla da Costa. *Física: contexto aplicações: ensino médio*. 2. ed. São Paulo: Scipione, 2016. ISBN 9788526299191.
 - [5] TAYLOR, John R. *Mecânica Clássica*. Porto Alegre: Bookman, 2013. ISBN 978-85-8260-088-7.
 - [6] ACEVEDO, O. A.; PIMENTEL, B. M. Teoremas de Nöther: um estudo. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 45, p. e20230091, 2023.