e-Boletim de Física
International Centre for Physics
Instituto de Física, Universidade de Brasília
Ano 13, 2025 • http://periodicos.unb.br/index.php/e-bfis • eBFIS **XIII** 02-1(03)

Introdução ao Formalismo da Equação de Klein-Gordon: Da Dedução Relativística às Partículas de Spin-0

Hudson Rodrigues Armando,* Bill Darwin Aparicio Huacarpuma,
Willian Fabio Radel, and Rodrigo Alkimim Faria Alves

No início do século XX, as estruturas da Física foram abaladas pelo surgimento de duas teorias revolucionárias: a Relatividade Restrita e a Mecânica Quântica. Apesar dos desafios em conciliar essas duas teorias, as tentativas de unificação deram origem à Mecânica Quântica Relativística, uma teoria capaz de descrever as partículas elementares em um regime de altas energias. Este estudo se propõe a apresentar uma abordagem introdutória à equação de Klein-Gordon, uma das primeiras tentativas em busca da referida unificação. Por meio de revisões da literatura existente sobre o tema, foi apresentada uma dedução da Klein-Gordon partindo da equação de onda de Schrodinger para a partícula livre. Apresentamos também a equação de Klein-Gordon nos limites não relativísticos, bem como as suas implicações na teoria quântica relativística, mostrando a sua importância na descrição teórica das partículas e antipartículas de spin-0.

Keywords: Equação de Klein-Gordon. Spin-0. Mecânica Quântica Relativística. Partículas Livres.

I. INTRODUÇÃO

As três primeiras décadas do século XX serviram de palco a uma intensa atividade científica que revolucionou a física. Em 1905, Einstein apresentou ao mundo a sua teoria da relatividade especial [1] e, dez anos depois, as equações de campo que constituem o cerne da sua Teoria Geral da Relatividade [2]. Esta última, ao incorporar a gravidade em sua descrição da realidade física, tornou-se um arcabouço teórico de notável elegância matemática [3]. Uma década após a inestimável contribuição de Einstein, em 1925, Bohr e Heisenberg apresentaram o formalismo da mecânica matricial [4] para descrever a também incipiente teoria quântica. Em 1926, Erwin Schrödinger publicou um estudo onde aparece pela primeira vez a ideia de usar uma função de onda [5] para descrever um sistema quântico evoluindo no tempo [6].

Proposta independentemente por Oskar Klein e Walter Gordon em 1926, a equação de Klein-Gordon [7, 8] surgiu como uma tentativa de reconciliar a mecânica quântica com a relatividade especial de Einstein, visto que a teoria de Einstein já havia sido confirmada experimentalmente e descrevia corretamente os fenômenos a velocidades próximas a da luz no vácuo, o que demandava uma modificação da teoria quântica a fim de corrigi-la no limite relativístico [9, 10]. Embora a formulação inicial da equação de Klein-Gordon tenha enfrentado resistências devido às dificuldades de interpretação, não demorou muito para que ela se tornasse uma ferramenta crucial para a compreensão de fenômenos fundamentais em diferentes contextos teóricos e experimentais, que vão desde a física de partículas até a astrofísica [11, 12] (Figura 1).

Além de descrever partículas escalares de spin-0, a equação de Klein-Gordon é usada na física de partículas para modelar campos quânticos [13]. Na física nuclear ela modela as partículas mediadoras de forças nucleares conhecidas como mésons [14]. Na astrofísica e cosmologia a equação é usada em modelos de inflação cósmica e matéria escura [15, 16]. Na relatividade geral aplicam-se versões generalizadas da equação de Klein-Gordon para campos escalares em espaço-tempo curvos, compondo modelos fundamentais para estudar a radição de Hawking no horizonte de eventos de buracos negros e a interação da gravidade com campos escalares [17, 18].

A equação Klein-Gordon introduziu a noção de um campo quântico relativístico, possibilitando uma descrição consistente das partículas neutras e carregadas, incluindo bósons intermediários responsáveis pela força eletromagnética e interações nucleares [23]. Além disso, essa equação teve um papel fundamental na previsão teórica de novas partículas, como o píon (méson-π), cuja existência foi confirmada experimentalmente em 1947 por Cecil Powel, César Lattes e Giuseppe Occhialini [24, 25].

Este artigo tem o objetivo de apresentar um estudo teórico introdutório sobre o formalismo da equação de Klein-Gordon. Inicialmente, será realizada uma breve introdução à notação tensorial, ferramenta indispensável para compreender os conceitos relativísticos da teo-

* hrodrigues1729@hotmail.com; Also at Instituto de Física, UnB.

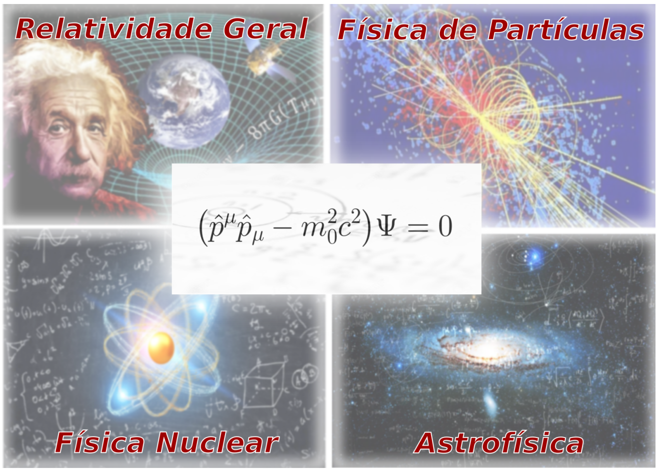

Figure 1. Áreas da Física em que a equação de Klein-Gordon se faz presente. [19–22].

ria. Em seguida, na seção III será feita uma dedução da Equação de Klein-Gordon a partir da equação de Schrodinger. Na seção IV, será abordada a questão do limite não relativístico da teoria, investigando como a equação de Klein-Gordon pode descrever partículas e antipartículas de spin-0. A relação entre a equação de Klein-Gordon e a Mecânica Quântica Relativística será explorada com mais detalhes na seção V, onde será apresentada uma interpretação das densidade de carga negativas que surgem da teoria. Por fim, a seção VI discutirá uma aplicação da equação de Klein-Gordon para descrever partículas de spin-0.

II. NOTAÇÃO TENSORIAL

Antes de abordar os preceitos básicos para o desenvolvimento de uma teoria quântica relativística, é pertinente revisar alguns conceitos fundamentais da relatividade restrita e da notação tensorial [26–28].

O estudo da relatividade restrita pode ser abordado através da definição dos chamados *quadrivetores*, de modo a garantir que a matriz das transformações de Lorentz seja ortogonal [29]. Sob essas condições, não há distinções entre as diferentes representações. Para alcançar esse resultado, é necessário incluir a componente temporal como um número imaginário.

Seja x^μ um quadrivetor no espaço de Minkowski com componentes (x_0, x_1, x_2, x_3) onde $x_0 = ict$ (componente temporal) e $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$ correspondem às componentes espaciais do espaço euclidiano tridimensional [30].

Para dois quadrivetores arbitrários α e β, pode-se estabelecer uma operação de *contração* definida como

$$\sum_{\mu=0}^{3} \alpha^\mu \beta_\mu = \alpha^\mu \beta_\mu \tag{1}$$

onde α^μ é um vetor covariante, β_μ um vetor contravariante e μ um índice que varia de 0 a 3.

Essa operação de *"levantamento"* e *"abaixamento"* de índice é intermediada pelo tensor métrico do espaço-tempo de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, definido como

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

onde os índices μ e ν variam de 0 a 3 [10].

A forma contravariante de $\eta_{\mu\nu}$ é representada por $\eta^{\mu\nu}$ [31], de tal forma que o produto de ambos resulta numa função delta:

$$\eta^{\mu\kappa}\eta_{\kappa\nu} = \delta^\mu_\nu \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

As componentes espaciais de x^μ compõem um vetor $\mathbf{r}$, ou seja, $x^\mu = (ct, \mathbf{r})$ e $x_\mu = (ct, -\mathbf{r})$. Portanto

$$x^\mu x_\mu = c^2 t^2 - \mathbf{r}^2 \tag{4}$$

que caracteriza a distância entre dois eventos no espaço tempo [32, 33].

Dessa forma, é possível definir o comprimento do tensor quadridimensional através da relação:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx_\nu \tag{5}$$

Definindo $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$, a equação (5) pode ser escrita de uma forma mais conveniente:

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = dx^\mu dx_\nu \tag{6}$$

III. DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON

A equação de Schrodinger pode ser utilizada para descrever a evolução temporal de uma partícula livre de massa m [34]:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi \tag{7}$$

onde H é o operador hamiltoniano não-relativístico

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \tag{8}$$

Assim, com o operador H acima inserido na equação (7), obtém-se a conhecida equação de Schrodinger para uma partícula livre:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \Psi(\boldsymbol{r}, t) \tag{9}$$

A evolução temporal da partícula relativística pode ser estudada usando o hamiltoniano

$$H = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4} \tag{10}$$

Dessa forma, a equação (9) assume a forma

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m_0^2 c^4}\, \Psi(\boldsymbol{r}, t) \tag{11}$$

Uma solução possível para contornar o radical que envolve o operador consiste em aplicar o hamiltoniano (10) novamente em ambos os lados da equação (11), resultando em

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t^2} = \left(-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m_0^2 c^4\right) \Psi(\boldsymbol{r}, t)$$

que pode ser reescrita como

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2}\right)\Psi = 0 \tag{12}$$

A expressão (12) é covariante sob transformações de Lorentz e constitui a equação de onda relativística de Klein-Gordon para uma partícula livre com spin-0 [35, 36]. Essa expressão exibe notáveis semelhanças com uma equação de onda clássica (exceto pelo m_0^2) onde o termo independente introduz uma escala de comprimento $\hbar/mc$, conhecida como o comprimento de onda de Compton [37].

Devido às diferenças fundamentais entre o espaço euclidiano e o espaço-tempo relativístico, o operador laplaciano ∇^2 [38] assume uma forma distinta no espaço de Minkowski, onde é conhecido como d'Alembertiano $\Box$ [39]. Este operador é um covariante de Lorentz definido por:

$$\Box = \nabla^\mu \nabla_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \tag{13}$$

Portanto, expressando a equação de Klein-Gordon (12) em termos do operador d'Alembertiano, obtém-se:

$$\left(\Box + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right)\Psi = 0 \tag{14}$$

O operador $\Box$ também é útil para descrever o operador quadri-momentum $\hat{p}^\mu$ de forma mais conveniente no espaço de Minkowski [40] e reescrever a equação de Klein-Gordon em termos desse operador. Assim, seja o vetor quadri-momentum

$$p^\mu = \left\{\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right\} \tag{15}$$

Usando a expressão da energia relativística presente no radical da equação (10) e a propriedade expressa em (4), o produto de p^μ pela sua forma covariante resulta em

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p} = m_0^2 c^2 \tag{16}$$

De forma análoga, o operador quadri-momentum $\hat{p}^\mu$ dado por

$$\hat{p}^\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} = i\hbar \nabla^\mu$$

pode ser aplicado à sua forma covariante $\hat{p}_\mu$, resultando em

$$\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu = -\hbar^2 \nabla^\mu \nabla_\mu = -\hbar^2 \Box \tag{17}$$

Assim, reescrevendo a equação (14) como

$$-\hbar^2 \Box \Psi = m_0^2 c^2 \Psi$$

E comparando com a expressão (17), o resultado obtido é novamente a equação de Klein-Gordon:

$$\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu \Psi = m_0^2 c^2 \Psi \tag{18}$$

A equação de Klein-Gordon apresenta algumas das características desejáveis em uma equação de onda relativística como, por exemplo, a sua natureza relativisticamente covariante devido à invariância do intervalo do espaço-tempo sob transformações de Lorentz [41]. Isso implica diretamente na consistência das derivadas presentes na equação (12), independentemente da mudança de referencial.

IV. O LIMITE NÃO RELATIVÍSTICO

Na seção III, a equação de Schrödinger para uma partícula livre relativística foi utilizada para deduzir a equação de Klein-Gordon. O objetivo agora é analisar a equação de Klein-Gordon no limite não relativístico, a fim de verificar se é possível reduzi-la à equação de Schrödinger. Este exame é fundamental para compreender a relação entre os regimes relativístico e não relativístico e para confirmar se as duas equações são consistentes sob diferentes condições físicas [42].

Uma estratégia útil para cumprir o objetivo proposto consiste em determinar uma função de onda Ψ composta de dois termos, de tal forma que em um deles esteja inserido a massa de repouso m_0 [31, 43]. Dessa forma, seja $\Psi(r,t)$ a seguinte função de onda:

$$\Psi(r,t) = \phi(r,t) e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \tag{19}$$

Calculando a derivada da função (19) em relação ao tempo e multiplicando ambos os lados da equação resultante por $i\hbar$:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(r,t)}{\partial t} = \left(i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} + m_0 c^2 \phi\right) e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \tag{20}$$

onde $i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = E' \frac{\partial \phi}{\partial t}$

No entanto, partindo da função (19), é possível demonstrar que, no limite não relativístico, a energia E da partícula difere minimamente de sua massa de repouso [31]. Ou seja, ao considerar que

$$E' = E - m_0c^2 \tag{21}$$

conclui-se de imediato que energia cinética E' é não relativística, pois $E' \ll m_0c^2$.

Dessa forma, a equação expressa em (20) pode ser aproximada com grande exatidão pela expressão

$$\frac{\partial \Psi(r,t)}{\partial t} \approx -\frac{im_0c^2}{\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t} \tag{22}$$

Derivando novamente a equação (20) em relação ao tempo, pode-se também obter uma boa aproximação dada por

$$\frac{\partial^2 \Psi(r,t)}{\partial t^2} = -\left(\frac{2im_0c^2}{\hbar}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{m_0^2c^4}{\hbar^2}\phi\right) e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t} \tag{23}$$

que, por sua vez, pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 \Psi(r,t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2}\left(\frac{2im_0c^2}{\hbar}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{m_0^2c^4}{\hbar^2}\right) \phi e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t} \tag{24}$$

Dessa forma, inserindo o resultado (24) na equação (14), obtém-se

$$i\hbar\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2\phi \tag{25}$$

O resultado expresso em (25) é a equação de Schrödinger para partículas livres de spin-0. A função de onda ϕ dessa equação não depende de a partícula descrita ser relativística ou não, o que induz à conclusão imediata de que a equação de Klein-Gordon descreve partículas e antipartículas de spin-0 [9, 31].

V. EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON E A MECÂNICA QUÂNTICA RELATIVÍSTICA

Seja $\Psi(\mathbf{r},t)$ uma função de onda relativística:

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \alpha e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})} = \alpha e^{-\frac{i}{\hbar}p^{x^\mu x_\mu}} \tag{26}$$

onde α é uma constante de normalização.

Ao substituir a função de onda (26) na equação (14)

$$\left(\Box + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)\alpha e^{-\frac{i}{\hbar}p^{x^\mu x_\mu}} = 0$$

obtém-se

$$\left(-\frac{E^2}{\hbar^2c^2} + \frac{p^2}{\hbar^2} + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)\alpha e^{-\frac{i}{\hbar}p^{x^\mu x_\mu}} = 0 \tag{27}$$

Assim, ao igualar a zero o termo entre parênteses da equação (27), obtém-se uma expressão para a energia da partícula livre relativística que é semelhante à obtida em (10).

$$E = \pm\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} \tag{28}$$

O resultado da expressão (28) é inicialmente contraintuitivo dentro da mecânica quântica, uma vez que possibilita à equação de Klein-Gordon a obtenção energias negativas. Essa possibilidade por si só induz à necessidade de se revisar o conceito de função de onda relativística. No entanto, foi descoberto posteriormente que as soluções associadas a energias negativas estão fisicamente relacionadas a antipartículas e, portanto, a equação de Klein-Gordon oferece um vislumbre valioso sobre os possíveis valores de energia dessas entidades físicas exóticas [31].

Uma forma de abordar esse problema consiste em encontrar uma lei de conservação para o quadrivetor de densidade de fluxo j_μ adequado à equação de Klein-Gordon (18).

No contexto de sistemas não relativísticos, a densidade de fluxo de probabilidade $\boldsymbol{j}$ [44] pode ser obtida pela expressão

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla\cdot\boldsymbol{j} \tag{29}$$

onde ρ é a densidade de probabilidade (uma variável positiva por definição). Essa equação 29 garante que a probabilidade dentro de um sistema fechado permanece constante ao longo do tempo [45].

Reescrevendo a Klein-Gordon obtida em (18) na forma

$$\left(\hat{p}^\mu\hat{p}_\mu - m_0^2c^2\right)\Psi = 0 \tag{30}$$

cujo complexo conjugado é

$$\left(\hat{p}^\mu\hat{p}_\mu - m_0^2c^2\right)\Psi^* = 0 \tag{31}$$

Agora, aplicando Ψ^* em ambos os lados da equação (30), procedendo da mesma forma com Ψ em relação à equação (31) e subtraindo as expressões resultantes:

$$\Psi^*\left(\hat{p}^\mu\hat{p}_\mu - m_0^2c^2\right)\Psi - \Psi\left(\hat{p}^\mu\hat{p}_\mu - m_0^2c^2\right)\Psi^* = 0$$

Da equação (17), tém-se

$$-\Psi^*\left(\hbar^2\nabla_\mu\nabla^\mu + m_0^2c^2\right)\Psi + \Psi\left(\hbar^2\nabla_\mu\nabla^\mu + m_0^2c^2\right)\Psi^* = 0$$

Portanto

$$\nabla_\mu j^\mu \equiv \nabla_\mu\left(\Psi^*\nabla^\mu\Psi - \Psi\nabla^\mu\Psi^*\right) = 0 \tag{32}$$

Ao multiplicar o lado direito da equação (32) pela constante $i\hbar/2m_0$, garante-se que o termo j_0 no quadrifluxo é constante e possui dimensão de densidade de probabilidade. Essa constante na equação assegura a existência de um limite não relativístico, resultando no quadrifluxo de densidade expresso por:

$$j_\mu = \frac{i\hbar}{2m_0}\left(\Psi^*\nabla_\mu\Psi - \Psi\nabla_\mu\Psi^*\right) = 0 \tag{33}$$

Efetuando a derivada temporal da quadri-corrente j^μ, obtém-se uma expressão de densidade. Isso ocorre porque a equação de Klein-Gordon é uma equação de segunda ordem na derivada temporal, o que significa que a derivada temporal da quadri-corrente é diretamente relacionada à densidade de probabilidade ρ e à densidade de corrente $\boldsymbol{j}$ [46, 47]. Assim, a equação de continuidade (29) pode ser expressa como

$$\rho(x,t) = \frac{i\hbar}{2m_0c^2}\left(\Psi^*\frac{\partial}{\partial t}\Psi - \Psi\frac{\partial}{\partial t}\Psi^*\right) \tag{34}$$

Apesar das expressões (33) e (34) não conduzirem diretamente a uma interpretação probabilística na formulação de Klein-Gordon, é possível multiplicá-las pela carga e fazendo com que as quantidades resultantes desse produto possam ser entendidas como uma densidade de carga $\rho'(x,t)$ e de corrente de carga $j'(x,t)$ [40, 48].

$$\rho'(x,t) = \frac{i\hbar e}{2m_0c^2}\left(\Psi^*\frac{\partial}{\partial t}\Psi - \Psi\frac{\partial}{\partial t}\Psi^*\right) \tag{35}$$

$$j_\mu = \frac{i\hbar e}{2m_0}\left(\Psi\nabla_\mu\Psi^* - \Psi^*\nabla_\mu\Psi\right) \tag{36}$$

As funções $\rho'(x,t)$ e j_μ representam, respectivamente, a distribuição de carga elétrica em um ponto no espaço-tempo e a taxa de fluxo de carga elétrica por esse ponto. Nas funções expressas em (35) e (36), a carga elétrica e foi usada para normalizar as quantidades $\rho(x,t)$ e $j(x,t)$, tornando possível a interpretação das funções resultantes em termos de densidade de carga e corrente.

Além disso, é importante notar que o produto pela carga elétrica e permite que a função $\rho'(x,t)$ assuma valores positivos, negativos e nulos, dependendo da natureza da carga. Essa variação de valores é consistente com a previsão teórica da existência de partículas e antipartículas, uma vez que as cargas positivas e negativas podem estar distribuídas no espaço [49].

Para aprofundarmos um pouco mais essa interpretação, ao substituir a função de onda relativística sugerida na equação (26) na função de densidade de carga obtida em (35) chega-se na expressão:

$$\rho'(x,t)_{(\pm)} = \pm\frac{e|E|}{m_0c^2}\Psi^*_{(\pm)}\Psi_{(\pm)} \tag{37}$$

A nova equação para densidade de carga expressa em (37) fornece uma interpretação mais clara sobre o significado das suas soluções. Assim, a função $\Psi_{(+)}$ descreve partículas com massa de repouso m_0 e carga $+e$, enquanto $\Psi_{(-)}$ representa algo com a mesma massa, mas com carga oposta $-e$, ou seja, as antipartículas.

O hamiltoniano usado para descrever a interação entre partículas e campos eletromagnéticos, estabelece uma correspondência direta entre as soluções de energias com suas cargas correspondentes [35]. Essa simetria sugere que as soluções de energia negativa representam antipartículas, ou seja, entidades físicas que possuem a mesma massa das partículas mas com cargas opostas, reforçando a teoria que prevê a existência de antimatéria.

Em 1932, o físico estadunidense Carl David Anderson confirmou experimentalmente essa previsão ao descobrir o pósitron (antipartícula do elétron) após os trabalhos de Dirac [50]. Essa descoberta lhe rendeu o Nobel de Física em 1936 (aos 35 anos de idade!) [51], validando a teoria quântica relativística.

VI. PARTÍCULAS LIVRES COM SPIN-0

O spin é uma propriedade quântica intrínseca das partículas elementares que, apesar de não possuir um análogo clássico, costuma ser comparado com o movimento de "rotação" das partículas, uma vez que o spin se manifesta como um momento angular quantizado cujos operadores satisfazem às propriedades de uma álgebra de Lie [52–54].

As partículas de spin-0 não possuem uma orientação de "rotação" específica, como ocorre no caso dos elétrons (férmions de spin-1/2) ou fótons (bósons de spin-1) (Figura 2). Dessa forma, as partículas de spin-0 são consideradas como partículas escalares por serem invariantes sob transformações de rotação [55].

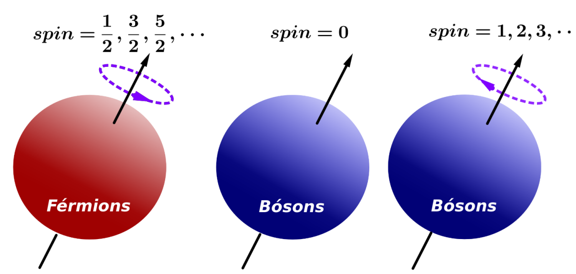

Figure 2. Representação dos spins de férmions e bósons.

Apesar de não existirem partículas com spin-0 estáveis na natureza, elas desempenham um importante papel na compreensão de uma série de fenômenos físicos, sobretudo na física de partículas e na cosmologia. Como exemplo de tais partículas pode-se citar os Píons e Káons, que são mésons formados por um quark e um antiquark. Essas partículas possuem um papel crucial na interação forte entre hádrons [45, 56].

Nesta seção, será apresentada uma das mais notáveis aplicações da Equação de Klein-Gordon: as partículas com spin-0. Mesmo sabendo que no âmbito de uma teoria relativística a ideia de uma partícula livre ser uma mera abstração, é possível lidar com esse conceito estudando as soluções livre da equação (18).

O estudo realizado na seção anterior mostrou como, a partir da densidade de corrente, foi possível deduzir uma expressão para a densidade de carga que tenha significado físico quando assume valores positivos, negativos ou nulos. No entanto, calculando as soluções para partículas livres, pode-se chegar a uma compreensão mais abrangente a respeito da existência de partículas e antipartículas no âmbito da teoria [31].

Partindo da equação de Klein-Gordon expressa em (18), pode-se afirmar que

$$\hat{p}^{\mu}\hat{p}_{\mu} - m_0^2c^2 = p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - m_0^2c^2$$

Sabendo que $p_0 = E/c$ [1], chega-se à conclusão de que o *momentum* $\boldsymbol{p}$ possui duas soluções possíveis, uma com a energia positiva e a outra negativa dada por

$$E_p = \pm c\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m_0^2c^2} \tag{38}$$

Assim, a função de onda relativística proposta anteriormente na equação (26) será expressa como

$$\Psi_{(\pm)} = \alpha_{(\pm)} e^{-\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} \mp |E_p|t)} \tag{39}$$

onde $\alpha_{(\pm)}$ é a constante de renormalização a ser definida posteriormente.

Inserindo as equações (38) e (39) na expressão deduzida anteriormente para a densidade de carga $\rho'(x,t)$ (35), torna-se possível reescrever a equação (37) evidenciando a energia E_p, ou seja:

$$\rho'_{(\pm)} = \pm\frac{e|E_p|}{m_0c^2}\Psi^*_{(\pm)}\Psi_{(\pm)} \tag{40}$$

Na seção anterior, foi feita a discussão sobre a interpretação das soluções dessa equação poderem ser positivas, negativas ou nulas. Além disso, é preciso mencionar que a solução geral da equação de onda é sempre uma combinação linear das possíveis soluções [31]. Para melhor ilustrar esse fato, pode-se considerar uma onda plana confinada aos limites de uma caixa de aresta L (Figura 3) levando em consideração os valores que função de onda precisa assumir no contorno do seu domínio [57].

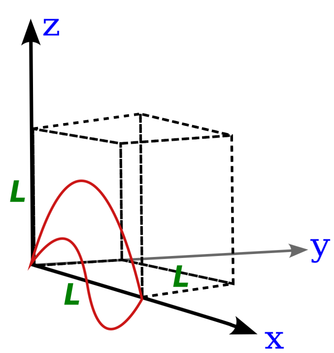

Figure 3. Caixa de normalização com largura L mostrando duas ondas estacionárias ao longo do eixo x (curvas vermelhas).

Este é o já conhecido problema do poço de potencial, que pode ser resolvido aplicando condições de contorno periódicas nas bordas da caixa [6]. Então:

$$\Psi_{n(\pm)} = \alpha_{n(\pm)} e^{-\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} \mp E_{pn}t)} \tag{41}$$

onde $\boldsymbol{p}_n = \frac{2\pi}{L}\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$

Para normalizar a função de onda é preciso integrar a função de densidade (40) ao longo do volume da caixa:

$$\int_{L^3} \rho_{(\pm)}\, d^3x = \pm\frac{eE_{pn}}{m_0c^2}|\alpha_{n(\pm)}|^2 L^3 = \pm e \tag{42}$$

Dessa forma, a equação de onda plana no limite relativístico será expressa por:

$$\Psi_{n(\pm)} = \sqrt{\frac{m_0c^2}{L^3E_{pn}}}e^{-\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} \mp E_{pn}t)} \tag{43}$$

O radical da constante que aparece do lado direito da equação acima deixa claro que a função de onda possui duas constante de normalização, uma positiva e outra negativa. Como a soma das soluções de uma equação diferencial também é uma solução da mesma [58], pode-se concluir que a solução mais geral da equação de Klein-Gordon para partículas de spin-0 (podendo elas serem positivas ou negativas) é expressa como

$$\Psi_{n(\pm)} = \sum_n c_n^{(\pm)}\sqrt{\frac{m_0c^2}{L^3E_{pn}}}e^{-\frac{i}{\hbar}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} \mp E_{pn}t)} \tag{44}$$

onde o valor de $c_n^{(\pm)}$ deve ser calculado com base nas condições de contorno da equação.

Porém, é importante observar que a função Ψ de Klein-Gordon não possui componente real para partículas de carga neutra, caso em que $\Psi^* = \Psi$ na equação (34) [9, 31]. Portanto, para obter uma função de onda que descreva corretamente a partícula neutra, basta somar as soluções normalizadas obtidas na equação (44), ou seja:

$$\Psi_{n(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Psi_{n(+)}(\boldsymbol{p}_n) + \Psi_{n(-)}(-\boldsymbol{p}_n)\right]$$

Obtendo assim a função

$$\Psi_{n(0)} = \sqrt{\frac{2m_0c^2}{L^3E_{pn}}}\cos\left(\frac{\boldsymbol{p}_n\cdot\boldsymbol{x} - E_{pn}t}{\hbar}\right) \tag{45}$$

Portanto, diante do que foi exposto, conclui-se que a equação de Klein-Gordon é um modelo fundamental na teoria quântica relativística, pois mostra que uma teoria dessa natureza conduz a novos graus de liberdade de carga das partículas, permitindo soluções para cada uma delas, e para cada *momentum* $\boldsymbol{p}$ [31]. Vale mencionar que uma descrição teórica mais ampla e robusta foi proposta posteriormente por Paul Dirac para descrever as partículas de spin-1/2 [59].

VII. CONCLUSÃO

A equação de Klein-Gordon foi proposta em meados da segunda década do século XX com o objetivo de combinar duas recentes teorias da física: a mecânica quântica e a relatividade especial. Embora inicialmente controversa, ela se tornou ferramenta fundamental para compreender fenômenos de partículas e a teoria quântica de campos.

Neste artigo de revisão, foi abordada uma discussão de caráter introdutório ao formalismo da equação de Klein-Gordon, fazendo um breve levantamento do contexto histórico em que ela foi proposta pela primeira vez até suas implicações na Mecânica Quântica Relativística.

O estudo apresentado mostrou como a equação de Klein-Gordon foi capaz de descrever partículas e antipartículas de spin-0 muito antes da existência destas serem comprovadas por experimentos empíricos, oferecendo *insights* profundos sobre as densidades de carga negativa que emergem da teoria. Esses resultados representaram um grande avanço no desenvolvimento da física teórica como um todo e se mostraram cruciais em aplicações práticas significativas, que vão desde a física de partículas até a cosmologia.

Portanto, o presente trabalho destaca a importância da equação de Klein-Gordon no desenvolvimento da física, mas enfatizando que ainda é preciso estabelecer conexões mais profundas a fim de alcançar a tão ambicionada teoria que unifique a relatividade geral e a mecânica quântica. Espera-se que este artigo sirva como ponto de partida para futuras pesquisas neste fascinante campo de pesquisa científica.

[1] A. Einstein, Annalen der physik **4** (1905).
[2] A. Einstein, Sitzungsberichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften , 831 (1915).
[3] L. D. Landau, *The classical theory of fields*, Vol. 2 (Elsevier, 2013).
[4] W. Heisenberg, Z. Phys **33**, 879 (1925).
[5] E. Schrödinger, Physical review **28**, 1049 (1926).
[6] H. R. Armando, K. H. Abbehausen, C. S. Costa, L. S. Barbosa, and D. L. Azevedo, e-Boletim da Física **11** (2023).
[7] O. Klein, Zeitschrift für Physik **37**, 895 (1926).
[8] W. Gordon, Z. Phys **40**, 117 (1926).
[9] C. Bueno, ifsc.usp.br (2014).
[10] J. J. Sakurai, *Advanced quantum mechanics* (Pearson Education India, 1967).
[11] D. P. Meira Filho, J. K. Kamassury, S. A. d. S. Farias, L. H. de Sousa, and S. d. A. Gomes, Revista Brasileira de Ensino de Física **43**, e20210172 (2021).
[12] T. Ohlsson, *Relativistic quantum physics: from advanced quantum mechanics to introductory quantum field theory* (Cambridge University Press, 2011).
[13] M. Srednicki, *Quantum field theory* (Cambridge University Press, 2007).
[14] M. Ebison, "Quarks and leptons: An introductory course in modern particle physics," (1985).
[15] B. Ryden, *Introduction to cosmology* (Cambridge University Press, 2017).
[16] J. Einasto, *Dark matter and cosmic web story*, Vol. 14 (World Scientific, 2013).
[17] K. S. Thorne, arXiv preprint arXiv:1901.06623 (2019).
[18] R. M. Wald, *General relativity* (University of Chicago press, 2010).
[19] Colada Web, "Imagem ilustrativa sobre a teoria da relatividade," (2014), acesso em: 14 abr. 2025.
[20] Depositphotos, "Science and research of the human brain - stock photo," (2020), acesso em: 14 abr. 2025.
[21] Google Images, "Imagem encontrada via google imagens," (2025), acesso em: 14 abr. 2025.
[22] Google Images, "Imagem encontrada via google imagens," (2025), acesso em: 14 abr. 2025.
[23] T. Banks, *Modern quantum field theory: a concise introduction* (Cambridge University Press, 2008).
[24] T. Lancaster and S. J. Blundell, *Quantum field theory for the gifted amateur* (OUP Oxford, 2014).
[25] H. Kragh, American Journal of Physics **52**, 1024 (1984).
[26] A. Lichnerowicz, (No Title).
[27] J. B. Neto, *Matemática para físicos com aplicações* (Livraria da Física, São Paulo, 2010).
[28] J. B. Neto, *Teoria de Campos ea Natureza: parte quântica* (Editora Livraria da Física, 2017).
[29] R. Resnick and S. Watanabe, *Introdução à relatividade especial* (Editora da Universidade de São Paulo, 1971).
[30] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics* (John Wiley & Sons, 2012).
[31] W. Greiner *et al.*, *Relativistic quantum mechanics*, Vol. 2 (Springer, 2000).
[32] V. Faraoni, *Special relativity* (Springer, 2013).
[33] P. Oliveira, I. Jardim, and R. Landim, Revista Brasileira de Ensino de Física **46**, e20230311 (2024).
[34] R. Eisberg and R. Resnick, *Quantum physics of atoms, molecules, solids, nuclei, and particles* (1985).
[35] H. Feshbach and F. Villars, Reviews of Modern Physics **30**, 24 (1958).
[36] J. Sucher, Journal of Mathematical Physics **4**, 17 (1963).
[37] J. J. Sakurai and J. Napolitano, *Mecânica quântica moderna* (bookman, 2013).
[38] D. J. Griffiths, "Eletrodinâmica, 3ª edição," (2011).
[39] M. Bartelmann, B. Feuerbacher, T. Krüger, D. Lüst, A. Rebhan, and A. Wipf, *Theoretische Physik* (Springer, 2015).
[40] I. P. L. Dias, (2021).
[41] A. Einstein, *Relativity, the Special and the General Theory: A Popular Exposition. Translated by Robert W. Lawson* (Crown, 1961).
[42] V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz, and V. Pitaevskii, Course of theoretical physics-Pergamon International Library of Science (1971).
[43] A. Nolinder and E. Sandberg, "The klein-gordon equation and pionic atoms," (2014).
[44] P. W. Courteille, Universidade de Sao Paulo. Instituto de Fısica de Sao Carlos **18**.
[45] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë, *Quantum Mechanics Volume 2* (Hermann, 1986).
[46] G. Cabrera, "Relatividade e mecânica quântica," (2019), acesso em 2 de Jun 2024.
[47] F. Mandl, A Wiley-Interscience Publication , 203 (1993).
[48] B. K. Moudrá, .
[49] W. M. MENDES, .
[50] C. D. Anderson, Physical Review **43**, 491 (1933).
[51] N. P. Outreach, "The nobel prize in physics 1936,"

(1936), acesso em 2 Jun 2024.

[52] M. E. Peskin, *An introduction to quantum field theory* (CRC press, 2018).

[53] D. Griffiths, *Introduction to elementary particles* (John Wiley & Sons, 2020).

[54] R. W. Brockett, in *Geometric Methods in System Theory: Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at London, England, August 27-September 7, 1973* (Springer, 1973) pp. 43–82.

[55] I. J. R. Aitchison and A. J. Hey, *Gauge theories in particle physics, Volume II: QCD and the Electroweak Theory* (CRC Press, 2003).

[56] J. R. Alacarás, "Mecânica quântica - spin," (2015), acesso em 2 de Jun 2024.

[57] A. Yanushauskas, "Dirichlet problem, encyclopedia of mathematics," (2001).

[58] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*, Vol. 10 (LTC Rio de Janeiro, 2010).

[59] P. A. M. Dirac, *The principles of quantum mechanics*, 27 (Oxford university press, 1981).