



Aproximação WKB aplicada ao decaimento radioativo alfa e a relação entre a energia do decaimento e o tempo de meia-vida.

S. G. S. P. Costa*

Faculdade Gama, Universidade de Brasília, Setor Leste (Gama), 72444-240, Brasília-DF, Brasil.

W. C. Santos†

*Instituto de Física, Universidade de Brasília, 70910-900, Brasília, DF, Brazil.
Faculdade Gama, Universidade de Brasília, Setor Leste (Gama), 72444-240, Brasília-DF, Brasil.*

R. A. Miranda‡

Faculdade Gama, Universidade de Brasília, Setor Leste (Gama), 72444-240, Brasília-DF, Brasil

Apresentamos nesse relatório uma explicação didática qualitativa e quantitativa acerca do decaimento radioativo alfa tendo como base teórica o efeito túnel abordado na Mecânica Quântica. Em uma primeira aproximação o potencial repulsivo entre as cargas positivas da partícula alfa e o núcleo residual do decaimento é modelado por uma barreira retangular. Porém, para uma abordagem mais precisa do decaimento alfa utilizamos o método da aproximação WKB (Wentzel, Kramers e Brillouin) aplicado ao efeito túnel, quando a partícula alfa atravessa a barreira de repulsão Coulombiana. A partir dos valores de energia cinética da partícula alfa e o tempo de meia-vida de cinco isótopos radioativos foi possível comparar os dados experimentais com os valores obtidos teoricamente pela aproximação WKB.

Keywords: Decaimento alfa, Mecânica Quântica e aproximação WKB, barreira de potencial, efeito túnel, tempo de meia-vida.

I. INTRODUÇÃO

O Decaimento alfa fora definido por Feynman [1] tal qual o processo compreendido como a "perfuração" quântica da barreira de potencial Coulombiano decorrente da função de onda da partícula α do núcleo até seu exterior. No entanto, muito antes de uma resposta unequivoca e consensual acerca da emissão da partícula por núcleos radioativos, Rutherford, no ano de 1899, descobrira a existência de três formas de radiação distintas, as quais classificou de acordo com a sua penetrabilidade: a radiação *alfa*, *beta*, e mais tardiamente, a *gama*; isso se deu apenas dois anos após a descoberta da própria radioatividade - em 1896 pelo francês Henri Becquerel [2]. Já na primeira década do século seguinte, Rutherford conjuntamente com Hans Geiger e Thomas Royds aprofundaram os estudos sobre a radiação α alcançando, de forma empírica, respostas acerca de sua origem; isso se deu a partir do confinamento de partículas α em um tubo de vidro - sob condição de vácuo - onde uma corrente elétrica perpassaria o recipiente, como resultado,

obtiveram um espectro de luz característico do gás hélio, atestando que a radiação alfa seria, então, constituída por um fluxo de átomos ionizados de hélio, o que posteriormente concluiriam ser núcleos do elemento em questão [3].

Apesar do amplo conhecimento adquirido por Rutherford no que tange a radioatividade, algo o intrigava após a realização de seu experimento de dispersão de partículas alfa, estas oriundas do Polônio - 212 (na época conhecido como Tório radioativo C'), o experimento ratificou a existência do potencial de repulsão da barreira de Coulomb no Urânio de pelo menos $8,57\text{MeV}$ de altura, todavia, tinha-se conhecimento que o Urânio - 238 emitia partículas alfas que possuíam energia muito inferior a requisitada, com cerca de $4,2\text{MeV}$, em síntese, como as partículas se sobressaiam à barreira de Coulomb para se dissociarem do interior do núcleo? Esse questionamento fora esclarecido em 1928 por George Gamow, e, independentemente, por Ronald Gurney e Edward Condon, baseando-se no tunelamento, ou efeito túnel, extraído da Mecânica Quântica [5], consistindo no fenômeno ao qual a partícula transpõe uma barreira potencial com energia superior a sua energia cinética [6]. De acordo com Griffiths foi a primeira vez que a física nuclear utilizou recursos da mecânica quântica [7].

Nas palavras de Merzbacher

* s.gspcosta@gmail.com

† wytler@fis.unb.br

‡ rmiracer@gmail.com

As novas teorias da Mecânica Quântica poderiam explicar duas características importantes do decaimento alfa: Como as probabilidades ocorrem naturalmente na Mecânica Quântica, ficou fácil entender o caráter estatístico observado da radioatividade alfa, com sua constante taxa de transição; e as teorias produziram uma relação funcional entre a taxa de decaimento (ou a meia-vida nuclear) e as energias das partículas alfa emitidas que estavam em concordância semiquantitativa com a experiência [5].

O objetivo deste artigo é apresentar, de maneira pedagógica, o decaimento alfa utilizando uma abordagem quântica simplificada. O trabalho será constituído dos seguintes tópicos. Na seção II, um estudo de caso em que se aplicará a teoria apresentada na seção para justificar o decaimento alfa do Urânio-238. Na seção III, será exposta a base teórica da aproximação WKB resultante da Mecânica Quântica, para a seção IV essa aproximação será aplicada no decaimento alfa. Finalizando na seção V com gráficos resultantes dos elementos decaídos do Urânio (${}_{92}\text{U}$) até o Polônio (${}_{84}\text{Po}$), discutindo os isótopos que melhor adequam a inclinação da reta experimental comparando os resultados com os valores teóricos calculados.

II. EXEMPLIFICAÇÃO PEDAGÓGICA DO DECAIMENTO ALFA

Os autores Sthefen T. Thornton e Andrew Rex propõem na referência [8] no exemplo 6.17 que a emissão de uma partícula α do núcleo do ${}^{238}\text{U}$, é emitida com energia de $4,2\text{MeV}$, sua massa é de $m_\alpha = 3727\text{MeV}/c^2$. O potencial está apresentado na Figura 1. O raio do núcleo é $r_N = 7 \times 10^{-15}\text{m}$. O problema consiste em encontrar a altura da barreira e a distância da partícula α deve tunelar, e usando a curva de potencial para calcular a probabilidade de tunelamento. Inicialmente, calculou-se o tamanho da barreira repulsiva V_c de acordo com a Figura 1, com $r = r_N$ pelo cálculo do potencial Coulombiano entre a partícula α e o núcleo resultante do decaimento com a distância do raio nuclear de $7 \times 10^{-15}\text{m}$. Então a energia potencial Coulombiana para a altura da barreira é

$$V_c = \frac{1}{4\epsilon_0\pi} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}. \quad (1)$$

Sendo Z_1 o número atômico da partícula α e Z_2 o número atômico do núcleo residual após o decaimento α do ${}^{238}\text{U}$, por conseguinte, tem-se

$$V_c = \frac{2 \times 92 \times (1,6 \times 10^{-19})^2 \times 9 \times 10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2}{7 \times 10^{-15}}$$

$$V_c = 37,85\text{MeV}.$$

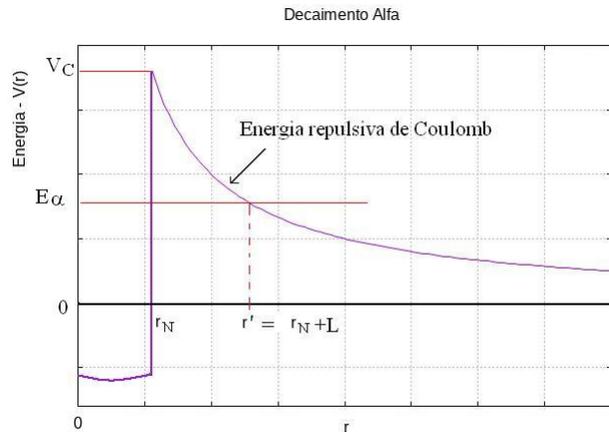


Figura 1. Energia potencial da partícula α idealizado por Gamow.

Note que o valor encontrado V_c é bem superior a $8,57\text{MeV}$ observado por Rutherford. Para se determinar a distância de repulsão que o núcleo exerce sobre a partícula α , representado por r' , utilizamos a conservação de energia. Observe novamente o gráfico da figura 1 quando a energia cinética E_α é igual a energia repulsiva de Coulomb, podemos calcular r' . Sabendo que $E_\alpha = 4,2\text{MeV}$, obtemos

$$4,2\text{MeV} = \frac{1}{4\epsilon_0\pi} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r'} \longrightarrow r' = 63\text{fm}. \quad (2)$$

A distância que a partícula α deve percorrer para tunelar foi considerada como a diferença entre o r' e o raio do núcleo de ${}^{238}\text{U}$, que será:

$$L = r_N - r' = 63\text{fm} - 7\text{fm} = 56\text{fm}. \quad (3)$$

Na referência [8] a simplificação do tunelamento é de uma barreira retangular de altura V_c e largura L . No entanto, o valor encontrado para a barreira Columbian não se faz uma boa aproximação para V_c , isso se percebe quando ao calcular a probabilidade da partícula tunelar com o poço nesta altura V_c , a ordem de grandeza encontrada é extremamente pequena (em torno de 10^{-120}). A modelagem para uma barreira retangular com valores que dão uma aproximação aceitável, é assumirmos a altura da barreira na metade do valor de V_c , $V = 18,935\text{MeV}$, isso se dá também para a largura, com um valor pela metade do que foi calculado na equação (3), fazendo $L = 28\text{fm}$. De acordo com a referência [8] a probabilidade de tunelamento T é calculada pela equação abaixo

$$T = \frac{16E}{V} \left(1 - \frac{E}{V}\right) e^{-2kL} \text{ onde } k = \frac{\sqrt{2m(V-E)}}{\hbar}. \quad (4)$$

Substituindo os valores nas equações acima (4), tem-se

$$T = 16 \frac{4,2\text{MeV}}{18,925\text{MeV}} \left(1 - \frac{4,2\text{MeV}}{18,925\text{MeV}}\right) e^{-94} \approx 4 \times 10^{-41}.$$

Isso ainda é uma estimativa simplificada do potencial da figura 1 para uma barreira retangular, no entanto ao reformular o ponto de partida e calcular a partir do tempo que leva para uma partícula α escapar, tem-se então uma nova modelagem do decaimento de ^{238}U : se a energia cinética de uma partícula α é dada por:

$$K = \frac{1}{2}mv^2. \quad (5)$$

Isolando v

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 4,2 \text{ MeV}}{3727 \text{ MeV}/c^2}}$$

$$v = 0,047c = 1,4 \times 10^7 \text{ m/s}. \quad (6)$$

Como diâmetro do núcleo é entorno de $1,4 \times 10^{-14} \text{ m}$, então o tempo gasto para a partícula α ir de um extremo ao outro do núcleo

$$\frac{1,4 \times 10^{-14} \text{ m}}{1,4 \times 10^7 \text{ m/s}} \rightarrow \delta t \approx 10^{-21} \text{ s}$$

A partícula α ricocheteia o núcleo indo e voltando a distância de $1,4 \times 10^{-14} \text{ m}$. Em $2,5 \times 10^{40}$ tentativas, apenas uma colisão tem chances de tunelar. O tempo para que as $6,667 \times 10^{40}$ tentativas resultem em uma colisão é Δt .

$$\Delta t = 2,5 \times 10^{40} \times 10^{-21} \text{ s} = 2,5 \times 10^{19} \text{ s}$$

$$\Delta t = 8,17 \times 10^{11} \text{ anos}. \quad (7)$$

Mas o tempo de decaimento em meia-vida para o ^{238}U é $4,5 \times 10^9$ anos, $4,5$ bilhões de anos que equivalem a $1,42 \times 10^{17} \text{ s}$. Então, usando o tempo necessário para o elemento decair em meia-vida se tem uma melhor estimativa de T , a probabilidade de tunelamento:

$$T = \frac{\delta t}{1,42 \times 10^{17} \text{ s}} = 7,04 \times 10^{-39}. \quad (8)$$

Com o valor de probabilidade de tunelamento calculado na equação (8), se mantermos a largura da barreira como sendo $L = 28 \text{ fm}$, a altura da barreira é recalculada para $V = 17,376 \text{ MeV}$. Contudo, utilizar uma representação simplista da barreira não é frutífero para os problemas de decaimento alfa, a não ser para exercícios didáticos, sendo então necessário a utilização de métodos mais eficientes como por exemplo a aproximação WKB descrita na seção subsequente.

III. APROXIMAÇÃO WKB E O TUNELAMENTO

A aproximação WKB (Wentzel, Kramers e Brillouin) é um recurso alternativo oriundo da necessidade de se obter uma resposta, ainda que aproximada, acerca da equação de Schrödinger para níveis de energia de estados

ligados e nas taxas de tunelamento por meio de barreiras de potenciais [7], [10]. A aproximação WKB foi o método utilizado por George Gamow em 1928 para explicar o decaimento alfa e que será discutido com detalhes na seção IV.

Inicialmente vejamos a equação de Schrödinger em uma dimensão

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (9)$$

equivalente a energia clássica:

$$\left[\frac{p^2}{2m} + V(x)\phi(x) \right] = E\psi(x). \quad (10)$$

Onde identificamos o termo operador momento dado por:

$$\frac{p^2}{\hbar^2}\psi = -\frac{d^2\psi}{dx^2}. \quad (11)$$

Da equação (10) identificamos que: $p(x) = \sqrt{2m[E - V(x)]}$.

Para o problema do tunelamento de uma barreira de potencial como visto na figura 2

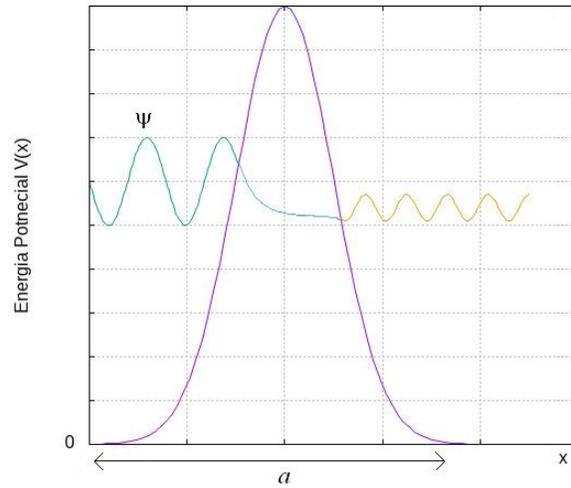


Figura 2. Representação da barreira de potencial.

a energia E é menor que $V(x)$, ou seja,

$$p(x) = i\sqrt{2m|E - V(x)|} \rightarrow p^2 = -2m|E - V(x)| \quad (12)$$

aplicando a equação acima na equação (11), obtemos

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}|E - V(x)|\psi \quad \text{ou} \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{|p|^2}{\hbar^2}\psi. \quad (13)$$

A solução proposta é uma amplitude de onda variável vezes uma exponencial real

$$\psi(x) = A(x)e^{\phi(x)}. \quad (14)$$

Vamos derivar duas vezes a função acima

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dx^2} = & \left[\frac{d^2A}{dx^2} + 2 \left(\frac{dA}{dx} \right) \left(\frac{d\phi}{dx} \right) + \right. \\ & \left. + A \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + A \frac{d^2\phi}{dx^2} e^\phi \right] \end{aligned} \quad (15)$$

e substituindo na equação (13)

$$\begin{aligned} \frac{d^2A}{dx^2} + 2 \left(\frac{dA}{dx} \right) \left(\frac{d\phi}{dx} \right) + A \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + A \frac{d^2\phi}{dx^2} = \\ = \frac{|p|^2}{\hbar^2} A. \end{aligned} \quad (16)$$

Na aproximação WKB a equação (16) é separada em duas equações:

$$\frac{d^2A}{dx^2} + A \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = \frac{|p|^2}{\hbar^2} A \quad (17)$$

$$2 \left(\frac{dA}{dx} \right) \left(\frac{d\phi}{dx} \right) + A \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0. \quad (18)$$

A equação (17) pode ser reescrita como:

$$\frac{d^2A}{dx^2} = -A \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - \frac{|p|^2}{\hbar^2} \right] \quad (19)$$

e a equação (18) como,

$$\frac{d}{dx} \left[A^2 \frac{d\phi}{dx} \right] = 0. \quad (20)$$

A equação (20) se resolve facilmente por

$$A \frac{d\phi}{dx} = C^2 \quad \text{ou} \quad A = \frac{C}{\sqrt{\frac{d\phi}{dx}}}, \quad (21)$$

onde C é uma constante real. Para resolver a equação diferencial (19) verifica-se algumas dificuldades analíticas, então se propõe na aproximação WKB que

$$\frac{1}{A} \frac{d^2A}{dx^2} \ll \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - \frac{|p|^2}{\hbar^2} \approx 0 \quad (22)$$

então temos que

$$\frac{d\phi}{dx} \approx \frac{|p|}{\hbar}, \quad (23)$$

observe que a amplitude A(x) na equação (20) será $A = \hbar C / \sqrt{|p|}$, e, portanto,

$$\phi(x) = \pm \frac{1}{\hbar} \int |p(x)| dx, \quad (24)$$

Assim, a função de onda da equação [14] na barreira de potencial para a aproximação WKB, será:

$$\phi(x) = \frac{\hbar C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{\pm \frac{1}{\hbar} \int |p(x)| dx} \quad (25)$$

Como a probabilidade de uma partícula quântica atravessar a barreira deve diminuir com a largura da barreira, vamos assumir que $\phi(x)$ decaia,

$$\phi(x) = \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int |p(x)| dx}. \quad (26)$$

Se considerarmos uma barreira de largura correspondente ao intervalo $0 \leq x \leq a$, e que a função de onda incidente para $x \leq 0$ dada por

$$\phi(x) = A e^{ikx} \quad (27)$$

e a onda transmitida que tunela a barreira para $x > a$ é dada por

$$\phi(x) = F e^{ikx}. \quad (28)$$

Com isso o coeficiente de transmissão é igual a

$$T = \frac{|A|^2}{|F|^2}. \quad (29)$$

Como a função de onda decai exponencialmente na região $0 \leq x \leq a$,

$$T \approx \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_0^a |p(x)| dx \right\} \quad (30)$$

ou de forma simplificada

$$T \approx e^{-2\gamma}, \quad \text{sendo} \quad \gamma = \frac{1}{\hbar} \int_{r_N}^{r'} \sqrt{2m|E - V(r)|} dr \quad (31)$$

A equação (30) mede a taxa de transmissão das partículas quânticas através de uma barreira de largura a . Aplicaremos essa teoria da aproximação WKB e verificaremos que esse método funciona de forma razoável para o decaimento alfa.

IV. APLICAÇÃO DA APROXIMAÇÃO WKB NO DECAIMENTO ALFA

Na descrição do decaimento alfa utilizando a aproximação WKB, devemos considerar o problema em três dimensões, onde a equação de Schrödinger em três dimensões em coordenadas esféricas é dada por:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \right] \psi + V(r)\psi = E\psi \end{aligned} \quad (32)$$

onde $\psi = \psi(r, \theta, \phi)$, por separação de variáveis escrevemos:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi),$$

de forma que a equação de Schrödinger pode ser reescrita da seguinte forma,

$$\left[\frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} (V(r) - E) \right] + \frac{1}{Y(\theta, \phi)} \left[\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 Y(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} \right) \right] = 0.$$

O primeiro termo entre colchetes depende somente da variável r e o segundo depende das coordenadas θ e ϕ , conseqüentemente, cada colchete deve ser constante de forma que a solução encontrada e estudada nos textos de Mecânica Quântica [7] é dada por duas equações:

$$\frac{1}{Y(\theta, \phi)} \left[\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 Y(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} \right) \right] = -l(l+1) \quad (33)$$

e

$$\left[\frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} (V(r) - E) \right] = l(l+1)$$

onde l é o número quântico secundário relacionado com o momento angular do sistema quântico. Na equação radial (34), fazendo $R(r) = \frac{u(r)}{r}$, obteremos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u(r) = Eu(r). \quad (34)$$

Vamos destacar que a solução da equação de Schrödinger em três dimensões acrescenta ao termo da energia potencial o termo centrífugo, de forma que o potencial efetivo será dado por:

$$V_{ef}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2}. \quad (35)$$

As considerações que iremos abordar a seguir, são situações onde a energia do sistema nuclear está no estado fundamental, onde o momento angular do sistema é nulo, ou seja, $l = 0$. É nessa situação que iremos trabalhar o método da aproximação WKB, com a ausência do termo centrífugo, onde a energia de ligação está no nível fundamental, onde a energia potencial é dada pela equação,

$$V_{ef}(r) = V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r}. \quad (36)$$

Na prática, a explicação desenvolvida por Gamow, Condon e Gurney, observada na referência [7], se dá da seguinte maneira: Uma partícula α apresenta carga elétrica positiva ($+2e$), e, por conseqüência, pode ser repelida pelo núcleo residual de carga Ze caso não consiga ficar

afastada o suficiente da força de ligação nuclear. Considerando a barreira potencial constituída pelo dobro da energia da partícula α , como é bem sabido para o Urânio. Igualar-se a energia potencial ao poço quadrado finito, o qual representa a força nuclear de atração, expandindo-o até o raio do núcleo, r_N , sucedido por uma hipérbole decrescente que é associada a repulsão Coulombiana, como ilustrado figura 1. Admitindo-se que a energia da partícula alfa é E_α acima é igual a energia da partícula emitida E_α e r' o raio de retorno mais externo, para a energia tem-se:

$$E_\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r'}. \quad (37)$$

Pode-se então calcular o expoente γ relativo a probabilidade de tunelamento ($T \cong e^{-2\gamma}$) como

$$\gamma = \frac{1}{\hbar} \int_{r_N}^{r'} |p(r)| dr, \quad (38)$$

em que $p(r)$ é o momento da partícula, classicamente equacionado como $p(r) = \sqrt{2m[E - V(r)]}$, sendo E a energia total e $V(r)$ a potencial, assim, substituindo a equação (37) na equação (38), o resultado é

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\hbar} \int_{r_N}^{r'} \sqrt{2m \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r} - E \right)} dr \\ \gamma &= \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \int_{r_N}^{r'} \sqrt{\frac{r'}{r} - 1} dr. \end{aligned}$$

Realizando a integração pelo método da substituição, para $r \equiv r' \sin^2 u$, obtém-se

$$\gamma = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \left[r' \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \sqrt{\frac{r_N}{r'}} \right) - \sqrt{r_N(r' - r_N)} \right]. \quad (39)$$

Considerando $r_N \ll r'$, utiliza-se uma aproximação pra pequenos ângulos a fim de simplificar o resultado obtido, logo, se $\sin \left(\sqrt{\frac{r_N}{r'}} \right) \approx \sqrt{\frac{r_N}{r'}}$, o valor de γ será

$$\gamma \cong \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \left[\frac{\pi}{2} r' - 2\sqrt{r_N r'} \right] \rightarrow \gamma = K_1 \frac{Z}{\sqrt{E}} - K_2 \sqrt{Z r_N}. \quad (40)$$

Sendo

$$\begin{aligned} K_1 &= \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{\pi \sqrt{2m}}{\hbar} \\ &= \frac{1,44 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{197,33 \text{ eV} \cdot \text{nm}} \pi \sqrt{2 \times 3727,38 \text{ MeV}} \\ &= 1,980 (\text{MeV})^{1/2} \end{aligned} \quad (41)$$

e

$$K_2 = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^{1/2} \frac{4\sqrt{m}}{\hbar} = 1.485 (\text{fm})^{-1/2}. \quad (42)$$

Ao se analisar a partícula se movendo no interior do núcleo, com velocidade média v , nota-se que as colisões entre a partícula e o limiar do núcleo contabilizam um tempo médio de $2r_N/v$, cuja frequência se dará por seu inverso ($v/2r_N$). Por conseguinte, a probabilidade de fuga da partícula a cada colisão será equivalente a $T \cong e^{-2\gamma}$ como fora discutido anteriormente, assim, a probabilidade de emissão por unidade de tempo resultará em $\frac{v}{2r_N}e^{-2\gamma}$. Dessa maneira, tem-se que o tempo de meia-vida do núcleo radioativo [7] dado por

$$t_{1/2} = \frac{2r_N}{v}e^{2\gamma}. \quad (43)$$

A partir da manipulação algébrica da equação acima, pode-se obter um ângulo, cuja função tangente servirá de base comparativa com o valor obtido graficamente, este por sua vez elaborado a partir dos dados experimentais dos isótopos radioativos dos elementos em estudo. Para tanto, aplica-se a função logarítmica de base 10

$$\log_{10} t_{1/2} = \log_{10} \left[\left(\frac{2r_N}{v} \right) e^{2\gamma} \right]$$

Usando as propriedades operatórias do logaritmo

$$\log_{10} t_{1/2} = \log_{10} \left(\frac{2r_N}{v} \right) + 2\gamma \log_{10} e$$

o termo $\log_{10} \left(\frac{2r_N}{v} \right)$ é constante e será denotado por N_1 . Assim, tem-se

$$\log_{10} t_{1/2} = N_1 + 2\gamma \log_{10} e. \quad (44)$$

Substituindo a equação (40) na equação acima

$$\begin{aligned} \log_{10} t_{1/2} &= N_1 + 2 \left(K_1 \frac{Z}{\sqrt{E}} - K_2 \sqrt{Zr_N} \right) \log_{10} e \\ \log_{10} t_{1/2} &= N_1 - 2K_2 \sqrt{r_N Z} \log_{10} e + \frac{2K_1 Z \log_{10} e}{\sqrt{E}}. \end{aligned}$$

Da mesma forma como foi empregado N_1 na equação (44), utiliza-se agora $N_2 = N_1 - 2K_2 \sqrt{r_N Z} \log_{10} e$

$$\log_{10} t_{1/2} = N_2 + \frac{1}{\sqrt{E}} 2K_1 Z \log_{10} e. \quad (45)$$

Fazendo o gráfico cujo o eixo das abcissas é formado pelo logaritmo do tempo de meia-vida do elemento radioativo e o eixo das ordenadas pelo inverso da raiz quadrada da energia cinética da partícula, ambos os valores obtidos experimentalmente. Dessa maneira, tem-se um parâmetro comparativo entre os resultados teóricos e os dados experimentais, assunto que será melhor discutido na seção V.

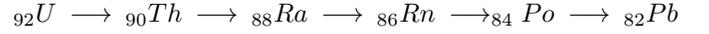
V. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Como citado na seção anterior, os gráficos elaborados através dos dados experimentais proporcionam uma

base comparativa. Essa comparação se dará por meio dos coeficientes angulares, um, resultante da regressão linear dos pontos constituintes do gráfico, o outro obtido como consequência da equação (45), como mostrado abaixo:

$$m_\theta = 2K_1 Z \log_{10} e. \quad (46)$$

O gráficos foram elaborados por meio do software livre SciDAVis, os dados experimentais retirados da tabela: *The 2016 Atomic mass table, Chinese Physics C*, vol. 41, 2017 [9]. Os elementos utilizados foram os constituintes do ciclo de decaimento do Urânio, se limitando até o Polônio.



A escolha se deu em virtude da vasta gama de aplicações e estudos já desenvolvidos acerca dos elementos em questão, assim, serão expostos: o Urânio, Tório, Rádio, Radônio, e o Polônio. Os isótopos que compõem os gráficos foram selecionados de acordo com a forma de decaimento.

1. Urânio - ${}_{92}U$:

Tabela I. Dados Experimentais dos Isótopos de Urânio

Isótopo	$t_{1/2}$ (anos)	Energia Cinética α (MeV)	Raio Atômico(m)
${}^{228}U$	$01,73 \times 10^{-05}$	06,68	$07,33 \times 10^{-05}$
${}^{230}U$	$05,69 \times 10^{-02}$	05,88	$07,35 \times 10^{-05}$
${}^{232}U$	$06,89 \times 10^{+01}$	05,32	$07,37 \times 10^{-05}$
${}^{234}U$	$02,45 \times 10^{+05}$	04,77	$07,39 \times 10^{-05}$
${}^{236}U$	$02,34 \times 10^{+07}$	04,49	$07,41 \times 10^{-05}$
${}^{238}U$	$04,47 \times 10^{+09}$	04,19	$07,43 \times 10^{-05}$

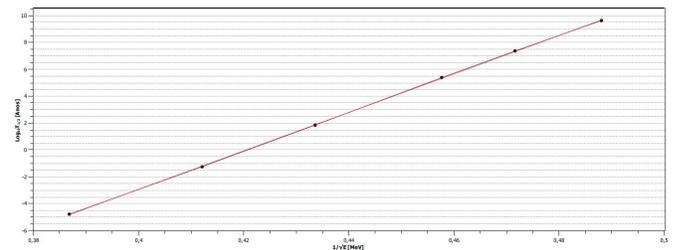


Figura 3. Regressão linear do ${}_{92}U$.

A regressão linear obtida por intermédio do software livre SciDAVis, indicou o coeficiente angular da reta de regressão valorado em 143,096. De posse do valor experimental, calcula-se agora o valor teórico utilizando a equação (46). Em que $K_1 = 1,980(\text{MeV})^{1/2}$ (equação 41), Z é o número atômico do átomo resultante do decaimento, para o caso do Urânio é o Tório com $Z = 90$. Assim tem-se da equação (46)

$$m_\theta = 2 \times 1.980 \times 90 \times \log_{10} e \cong 154,78$$

Calculado o erro entre a medida prevista pelo modelo quântico de tunelamento da barreira com o valor correto medido experimentalmente.

$$erro = \frac{|143,096 - 154,78|}{143,096} = 8\%$$

Isso representa uma boa aproximação entre a teoria e o valor próximo ao real, mostrando uma consonância entre ambas as abordagens.

2. Tório - ${}_{90}\text{Th}$:

Tabela II. Dados Experimentais dos Isótopos de Tório

Isótopo	$t_{1/2}$ (anos)	Energia Cinética - α (MeV)	Raio Atômico (m)
${}^{218}\text{Th}$	$03,45 \times 10^{-15}$	09,66	$07,22 \times 10^{-05}$
${}^{219}\text{Th}$	$03,32 \times 10^{-14}$	09,33	$07,23 \times 10^{-05}$
${}^{220}\text{Th}$	$03,07 \times 10^{-13}$	08,79	$07,24 \times 10^{-05}$
${}^{221}\text{Th}$	$05,32 \times 10^{-11}$	08,47	$07,25 \times 10^{-05}$
${}^{222}\text{Th}$	$06,97 \times 10^{-11}$	07,98	$07,27 \times 10^{-05}$

Semelhante ao que foi feito para o Urânio, aplica-se a equação (46), para Z relativo ao Rádío (átomo resultante do decaimento), $Z = 88$, resulta em

$$m_\theta = 2 \times 1.980 \times 88 \times \log_{10} e \cong 151,34.$$

Calculamos o coeficiente angular para a reta ajustada aos dados do Tório e visto no gráfico da figura 4 e obtemos $m_\theta = 142,5$. Comparando o valor obtido pela aproximação WKB, calculamos um erro de aproximadamente de 6,2%.

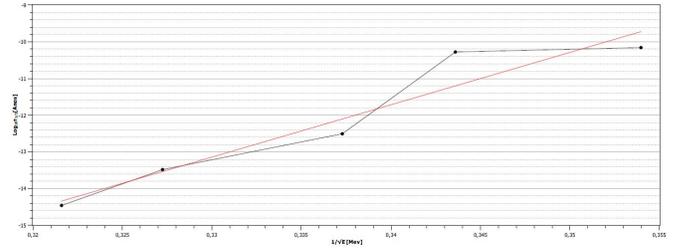


Figura 4. Regressão linear do ${}_{90}\text{Th}$.

3. Rádío - ${}_{88}\text{Ra}$:

Tabela III. Dados Experimentais dos Isótopos de Rádío

Isótopo	$t_{1/2}$ (anos)	Energia Cinética - α (MeV)	Raio Atômico (m)
${}^{216}\text{Ra}$	$05,69 \times 10^{-02}$	09,34	$07,20 \times 10^{-05}$
${}^{217}\text{Ra}$	$01,15 \times 10^{-02}$	08,99	$07,21 \times 10^{-05}$
${}^{218}\text{Ra}$	$06,89 \times 10^{+01}$	08,39	$07,22 \times 10^{-05}$
${}^{220}\text{Ra}$	$02,45 \times 10^{+05}$	07,45	$07,24 \times 10^{-05}$
${}^{221}\text{Ra}$	$07,04 \times 10^{+08}$	06,75	$07,25 \times 10^{-05}$
${}^{222}\text{Ra}$	$02,34 \times 10^{+07}$	06,56	$07,27 \times 10^{-05}$
${}^{223}\text{Ra}$	$04,47 \times 10^{+09}$	05,87	$07,28 \times 10^{-05}$

O procedimento é o mesmo e será realizado para todos os elementos em questão, com isso, para $Z = 86$ (número atômico do Radônio), da equação (46) a $m_\theta = 2_1 \times 86 \times = 147,90$, sendo o coeficiente angular no gráfico da figura 5 igual a 143,49, onde o erro medido para o elemento é

$$erro = \frac{|147,90 - 143,49|}{143,49} = 3,07\%$$

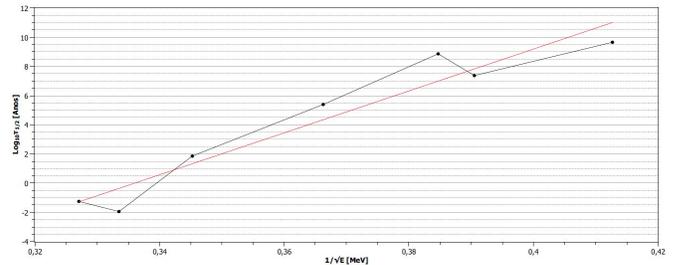
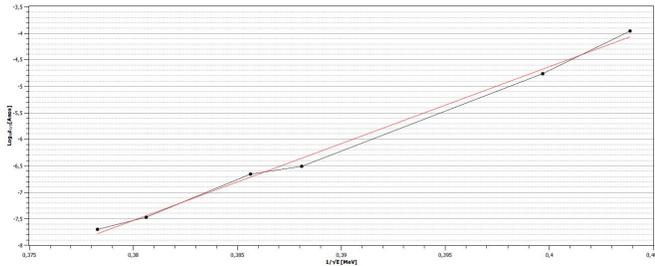


Figura 5. Regressão linear do ${}_{88}\text{Ra}$.

4. Radônio - ${}_{86}\text{Rn}$:

Tabela IV. Dados Experimentais dos Isótopos de Radônio

Isótopo	$t_{1/2}$ (anos)	Energia Cinética - α (MeV)	Raio Atômico (m)
${}^{199}\text{Rn}$	$01,96 \times 10^{-08}$	06,99	$07,00 \times 10^{-05}$
${}^{200}\text{Rn}$	$03,36 \times 10^{-08}$	06,90	$07,01 \times 10^{-05}$
${}^{201}\text{Rn}$	$02,21 \times 10^{-07}$	06,72	$07,22 \times 10^{-05}$
${}^{202}\text{Rn}$	$03,12 \times 10^{-07}$	06,63	$07,04 \times 10^{-05}$
${}^{206}\text{Rn}$	$01,73 \times 10^{-05}$	06,26	$07,09 \times 10^{-05}$
${}^{207}\text{Rn}$	$01,10 \times 10^{-04}$	06,13	$07,10 \times 10^{-05}$

Figura 6. Regressão linear do ${}_{86}\text{Rn}$.

Os isótopos de Radônio fornecem o gráfico acima representado, cuja função linear, utilizada na regressão, apresenta um coeficiente angular igual a 145,00. O cálculo teórico a partir da equação (46) onde $Z = 84$ resulta em:

$$m_{\theta} = 2 \times 1.980 \times 84 \times \log_{10} e \cong 144,46.$$

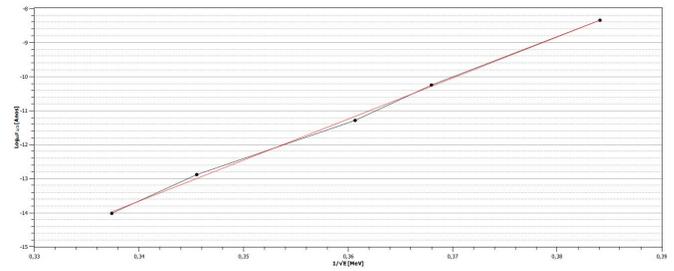
Aqui, o valor empírico extrapola o teórico em 0.34%.

5. Polônio - ${}_{84}\text{Po}$:

Tabela V. Dados Experimentais dos Isótopos de Polônio

Isótopo	$t_{1/2}$ (anos)	Energia Cinética - α (MeV)	Raio Atômico (m)
${}^{212}\text{Po}$	$09,47 \times 10^{-15}$	08,78	$07,15 \times 10^{-05}$
${}^{213}\text{Po}$	$01,33 \times 10^{-13}$	08,37	$07,16 \times 10^{-05}$
${}^{214}\text{Po}$	$05,20 \times 10^{-12}$	07,69	$07,17 \times 10^{-05}$
${}^{215}\text{Po}$	$05,64 \times 10^{-11}$	07,39	$07,18 \times 10^{-05}$
${}^{216}\text{Po}$	$04,59 \times 10^{-09}$	06,78	$07,20 \times 10^{-05}$

Para o Polônio, o coeficiente angular resultante da regressão linear é equivalente a 120,42, com a $m_{\theta} = 141,02$, onde $Z = 82$ relativo ao chumbo, o erro observado para o Polônio é de 17%, apresentando o maior erro quando comparado aos outros elementos em análise.

Figura 7. Regressão linear do ${}_{84}\text{Po}$.

VI. CONCLUSÃO

Em síntese, a aproximação WKB é um método alternativo, desenvolvido por Wentzel, Kramers e Brillouin para a solução da equação de Schrödinger para níveis de energia de estados ligados e para as taxas de tunelamento através das barreiras de potencial. Essa aproximação fornece uma melhor explicação acerca do decaimento alfa, através de mecanismo advindos da Mecânica Quântica inseridos na física nuclear. Para a análise do decaimento alfa pelo método da aproximação WKB que foi realizado nesse trabalho, foi selecionado alguns isótopos agrupados nas tabelas apresentadas na Seção V.

Através dos gráficos obtidos e por meio de uma regressão linear calculamos os coeficientes angulares a serem comparados com resultados obtidos pela aproximação WKB. Porém tivemos que excluir alguns isótopos que não se adequaram aos ajustes computacionais. Essa discrepância pode ser devido ao fato de que no decaimento alfa podem ocorrer variações nos valores da energia da partícula alfa emitida no decaimento. Por exemplo para o decaimento alfa do urânio ${}^{230}\text{U}$, 67,4% desse isótopo decaem com a emissão da partícula alfa com energia igual $5,88\text{MeV}$, ao passo que 32% decaem com emissão da partícula alfa com energia $5,82\text{MeV}$, e a diferença entre esses valores é compensada logo em seguida pela emissão de um fóton gama [8]. Como as tabelas consultadas para o decaimento alfa apresentam os valores de energia da partícula alfa emitida com maior percentual de ocorrência, pode ser que os isótopos que não se ajustaram ao cálculo não são os que emitem as partículas alfa com as energias que melhor se ajustam aos gráficos.

Ressaltamos também que a análise do decaimento alfa pelo método da aproximação WKB foi feita para o caso do decaimento alfa com o sistema no estado fundamental, onde $l = 0$, na equação (35). Com essa escolha é possível uma simplificação do problema, e o método adotado conduz a bons resultados. Vimos que o decaimento alfa para os isótopos de Urânio, Tório, Rádio e Radônio apresentaram erros relativos menores que 10%, sendo que os isótopos de Radônio apresentaram um erro

muito baixo de apenas 0,34%. Observamos que os isótopos do Polônio apresentaram o maior erro relativo entre dados experimentais e teóricos, cujo valor foi de 17%. Se fosse possível descrever com melhor exatidão teórica e computacional a barreira de tunelamento para esse modelo, provavelmente os resultados do modelo se ajustariam melhor aos dados experimentais. De qualquer forma pode-se afirmar e verificar que o fenômeno do tunelamento quântico é o responsável pelo decaimento alfa.

VII. AGRADECIMENTOS

SGSPC agradece à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CA-

PES) pelo apoio financeiro. RAM agradece o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), processos 407341/2022-6, e 407493/2022-0, e do Comitê de Pesquisa, Inovação e Extensão de Combate à COVID-19 (COPEI) da UnB, projeto 7178.

-
- [1] Feynman, R. P., *Física Nuclear Tórica*, p.14, CBPF/CNPq, 1954;
- [2] Salmeron, R. A., *Nota histórica - A descoberta da radioatividade*. São Paulo, 02 março de 2007. Disponível em: <<http://efisica.if.usp.br/moderna/radioatividade/historico/>>. Acesso em: 21 julho de 2018;
- [3] *Radioatividade*. CCIFUSP. Disponível em: <<http://portal.if.usp.br/fnc/pt-br/p/%C3%A1gina-de-livro/radioatividade>>. Acesso em 22 de julho de 2018;
- [4] "Ernest Rutherford - Biographical". Nobelprize.org. Nobel Media AB 2014. Web. Disponível em: <http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/chemistry/laureates/1908/rutherford-bio.html> Acesso em: 22 de julho de 2018;
- [5] Merzbacher, E., *The Early History of Quantum Tunneling*, p.47, Physics Today, 2002;
- [6] *The Potencial Barrier - Tunneling*. George Mason University. Disponível em: <physics.gmu.edu/~dmaria/590%20Web%20Page/public_html/qm_topics/potencial/barrier/STUDY-GUIDE.htm>. Acesso em: 23 julho de 2018;
- [7] Griffiths, D. J., *Mecânica Quântica 2ª ed.*, Pearson, 2005;
- [8] Thornton, S. T.; Rex, A., *Modern Physics for Scientists and Engineers: 4ª ed.* Cengage. 2006.
- [9] *The 2016 Atomic mass table, Chinese Physics C*, vol. 41, 2017.
- [10] Young, H. D.; Freedman, R. A., *Sears Zemansky - Física IV : ótica e física moderna/Young e Freedman*, 12ª ed., Pearson, 2009.