e-Boletim de Física
International Centre for Physics
Instituto de Física, Universidade de Brasília
Ano XX, 2023 • http://periodicos.unb.br/index.php/e-bfis • eBFIS **X** XXXX-1(XXXX)

Uma abordagem pedagógica da equação de difusão de nêutrons e suas aplicações

Clóves Júnior da Fonseca,* Ronni G. G. Amorim,† and Leandro X. Cardoso‡
Faculdade do Gama, Universidade de Brasília

Alisson Xavier Martins§
Instituto de Física, Universidade de Brasília

Neste trabalho é apresentada uma revisão pedagógica acerca da equação de difusão de nêutrons. Como aplicação, foram discutidos os problemas de atenuação de nêutrons, bem como o cálculo do raio crítico de reatores de formatos esférico e cilíndrico. Esperamos que este trabalho possa auxiliar estudantes que estão iniciando os estudos na área de reatores nucleares.

Keywords: reator nuclear; equação de difusão de nêutrons; raio crítico.

I. INTRODUÇÃO

A equação de difusão de nêutrons é um tópico fundamental para a compreensão do funcionamento de reatores nucleares de fissão [1]. Assim, compreendê-la bem é uma condição necessária a quem deseja inciar os estudos na área de engenharia nuclear. A difusão de susbtâncias e/ou partículas é um fenômeno bastante comum, inclusive em nosso dia a dia [4]. Como exemplo, podemos considerar a maneira como o cheiro de um perfume se espalha pelo ambiente quando abrimos o recipiente que contém o perfume. Inicialmente, as proximidades do recipiente contém uma concentração maior do olor do perfume que os outros pontos do ambiente. Devido a essa diferença de concentração, dizemos que há um gradiente da concentração de perfume, o que induz a propagação do cheiro para outros pontos do ambiente. Quando a distribuição do cheiro se torna homogênea, a difusão cessa. De um ponto de vista histórico, análises sistemáticas sobre fenômenos difusivos remontam a obra intitulada *The Nature of Things* de autoria do filósofo Lucretius em 60 a.C [3]. Em tal obra, Lucretius estudou o movimento de grãos de areia no ar. Contudo, foi somente com o trabalho de Fourier, já no século XIX, no qual foi estudada a propagação do calor nos sólidos, que a difusão foi sistematizada matematicamente [2]. Apesar de seu trabalho ter inicialmente sofrido bastante resistência para ser aceito, Fourier teve o nome destacado na teoria da difusão. Na sequência, o alemão Adolph Fick, estudando difusão em sistemas biológicos, tais quais a troca gasosa nos pulmões e a circulação do sangue, constatou uma lei em geral válida nos fenômenos difusivos, então denominada como lei de Fick; a qual assegura que o fluxo de matéria é proporcional ao seu gradiente de concentração. De forma suscinta, podemos dizer que a junção das ideias de Fourier com as de Fick origina o que hoje denominamos equação de difusão [4]. A teoria matemática da difusão foi então sendo aperfeiçoada, e hoje é aplicada numa imensa gama de áreas, tais quais: propagação de calor; difusão gasosa; transporte de substâncias em sistemas biológicos; transporte de nêutrons em reatores nucleares; dentre muitas outras.

Um sistema da engenharia nuclear que é entrelaçado ao problema da difusão é o reator nuclear de fissão. Nesse tipo de reator, núcleos de átomos são bombardeados por nêutrons, e a partir dessa reação de espalhamento, tais núcleos são fissionados e núcleos menores são produzidos em conjunto com outros nêutrons, e com a liberação de energia. Na maior parte desses reatores, o núcleo predominantemente utilizado é o urânio-235, emergindo da reação dois núcleos menores, uma média de 2,5 nêutrons e bastante energia. Uma reação típica que ocorre nos reatores de fissão é a seguinte [5]

$$n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{140}_{54}Xe + {}^{94}_{38}Sr + 2n + 250MeV,$$

em que n simboliza o nêutron. Observe que a colisão entre o nêutron e o urânio-235 produz os núcleos com menor número atômico, o xenônio e o estrôncio, liberando dois novos nêutrons e duzentos mega elétron-volt de energia [6]. Perceba que o nêutron é um dos principais agentes da fissão; assim, conhecer a sua concentração em cada parte do reator, e em cada instante, é muito relavante para que a sua quantidade possa ser controlada, garantindo assim o bom funcionamento do reator. Nesse caminho, o presente trabalho visa abordar, pedagogica-

* cjfonseca16@gmail.com
† ronniamorim@gmail.com
‡ fisleandro@gmail.com
§ alissonxmar@gmail.com

mente, o tema sobre equação de difusão de nêutrons a aplicá-lo na descrição de algumas propriedades dos reatores nucleares. Assim, a apresentação deste artigo é amparada nos seguintes tópicos: na seção II deduzimos a equação de difusão de nêutrons; na seção III aplicamos a equação de difusão em problemas envolvendo geometria unidimensional; na seção IV, utilizando a equação de difusão, calcularemos o tamanho crítico de um reator nuclear de fissão; por fim, na seção V, apresentamos as considerações finais e perspectivas.

II. A EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS

Nesta seção, faremos uma breve dedução da equação de difusão de nêutrons. A apresentação dada segue de perto a referência [7]. Para esse fim, primeiramente estabeleceremos a condição do balanço espacial de nêutrons. Assim, iniciemos considerando um elemento de volume infinitesimal $dv = dxdydz$, centrado no vetor $\vec{r}$, conforme mostrado na Figura 1.

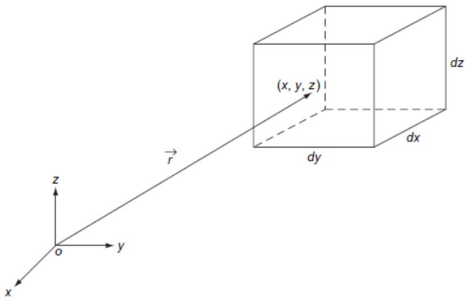

Figura 1. Elemento de volume para a dedução do balanço de nêutrons [7]

Se consideramos o estado estacionário, a condição de conservação de nêutrons nos leva a concluir que, a cada segundo, o número de nêutrons escapando de dV adicionado ao número de nêutrons absorvidos em dV é igual ao número de nêutrons emitidos pelas fontes em dV adicionado ao número de nêutrons produzidos por fissão em dV.

O número de nêutrons que escaparam do volume dv diz respeito a quantidade de nêutrons que saem do cubo da Figura 1 através de suas seis superfícies. Com a finalidade de realizarmos uma abordagem quantitativa da fuga de nêutrons, utilizaremos o conceito de densidade de corrente de nêutrons. Assim, denominemos por $J_x(x, y, z)$ o número líquido de nêutrons por centímetro quadrado e por segundo que atravessam o plano $y - z$ na direção x positiva em (x, y, z). De forma análoga, sejam $J_y(x, y, z)$ e $J_z(x, y, z)$ o número líquido de nêutrons por centímetro quadrado e por segundo que atravessam os plano $x - z$ e $x - y$, respectivamente. Considerando todo o cubo de volume dV, os números de nêutrons atravessando, por segundo, as faces da frente, da direita e do topo são, respectivamente, $J_x(x + 1/2dx, y, z)dydz$, $J_y(x, y + 1/2dy, z)dxdz$ e $J_z(x, y, z + 1/2dz)dxdy$. Da mesma forma, os números de nêutrons atravessando, por segundo, as faces da traseira, da esquerda e do fundo são, respectivamente, $-J_x(x - 1/2dx, y, z)dydz$, $-J_y(x, y-1/2dy, z)dxdz$ e $-J_z(x, y, z-1/2dz)dxdy$. Assim, o número líquido de nêutrons que vazam do cubo a cada segundo, representado por Φ é dado por

$$\begin{aligned}\Phi = &[J_x(x + 1/2dx, y, z) - J_x(x - 1/2dx, y, z)]dydz \\ &+ [J_y(x, y + 1/2dy, z) - J_y(x, y - 1/2dy, z)]dxdz \\ &+ [J_z(x, y, z + 1/2dz) - J_z(x, y, z - 1/2dz)]dxdy.\end{aligned}$$

Essa equação pode ser escrita ainda como

$$\begin{aligned}\Phi = &\left[\frac{J_x(x + 1/2dx, y, z) - J_x(x - 1/2dx, y, z)}{dx}\right] dxdydz \\ &+ \left[\frac{J_y(x, y + 1/2dy, z) - J_y(x, y - 1/2dy, z)}{dy}\right] dxdydz \\ &+ \left[\frac{J_z(x, y, z + 1/2dz) - J_z(x, y, z - 1/2dz)}{dz}\right] dxdydz.\end{aligned}$$

Como dx, dy e dz são elementos infinitesimais, podemos identificar as derivadas

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} = \frac{J_x(x + 1/2dx, y, z) - J_x(x - 1/2dx, y, z)}{dx},$$

$$\frac{\partial J_y}{\partial y} = \frac{J_y(x, y + 1/2dy, z) - J_y(x, y - 1/2dy, z)}{dy},$$

$$\frac{\partial J_z}{\partial z} = \frac{J_z(x, y, z + 1/2dz) - J_z(x, y, z - 1/2dz)}{dz}.$$

E então, escrevemos

$$\Phi = \left(\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}\right) dxdydz. \tag{1}$$

Se utilizarmos a notação vetorial para a densidade de corrente

$$\vec{J} = J_x\hat{i} + J_y\hat{j} + J_z\hat{k},$$

em que $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ são os vetores unitários nas direções x, y e z, respectivamente, chegamos a

$$\Phi = (\nabla \cdot \vec{J})dxdydz. \tag{2}$$

O número de nêutrons absorvidos a cada segundo no elemento de volume dV, denotado por n_a, é dado por

$$n_a = \Sigma_a n(x, y, z)vdxdydz, \tag{3}$$

em que Σ_a é a seção macroscópica de choque relativa à absorção dos nêutrons. O leitor deve ter conhecimento de que $\Sigma_a = N\sigma_a$, em que N é o número de átomos

responsável pela absorção de nêutrons e σ_a é a seção microscópica de choque. σ_a, cuja unidade é o Barn, símbolo b ($1b = 10^{-24}cm^2$) está relacionada à probabilidade de absorção do nêutrons devido ao choque do nêutron com determinado átomo. $n(x, y, z)$ é a densidade de nêutrons (número de nêutrons por unidade de volume) na posição (x, y, z), e v é a velocidade dos nêutrons.

Enquanto isso, o número de nêutrons produzidos por fissão, n_f no volume infinitesimal dV é

$$n_f = \nu\Sigma_f n(x, y, z)vdxdydz, \tag{4}$$

em que Σ_f é a seção de choque relativa à fissão do urânio, e é relacionada à probabilidade do nêutron provocar a fissão. ν é o a quantidade de nêutrons originados de cada fissão. O valor médio de ν é 2,5.

Se considerarmos que dentro do cubo infinitesimal haja uma fonte que emita $Q(x, y, z)$ nêutrons por unidade de volume por segundo, então, o número de nêutrons emitidos pela fonte por segundo é dada por

$$n_e = Q(x, y, z)dxdydz. \tag{5}$$

Com isso, o balanço espacial de nêutrons é

$$\nabla \cdot \vec{J} + \Sigma_a n(x, y, z)v = \nu\Sigma_f n(x, y, z)v + Q(x, y, z). \tag{6}$$

Se escrevermos a Equação (6) em termos do fluxo de nêutrons $\phi(x, y, z) = n(x, y, z)v$, obtemos

$$\nabla \cdot \vec{J} + \Sigma_a\phi(x, y, z) = \nu\Sigma_f\phi(x, y, z) + Q(x, y, z). \tag{7}$$

Usaremos a partir de agora $\phi(x, y, z) = \phi(\vec{r})$ e $Q(x, y, z) = Q(\vec{r})$.

Neste momento, apresentaremos a lei de Fick, pois a partir dela poderemos manipular a Equação (7) e enfim obter a equação de difusão de nêutrons. Sabemos que a difusão ocorre de regiões de maior concentração para regiões de menor concentração de nêutrons. Isso define uma corrente de difusão, o que define a passagem dos nêutrons através do meio. Do cálculo diferencial sabemos que o gradiente de uma função define a direção e o sentido da maior variação da função. Assim, podemos relacionar a corrente (ou densidade de corrente) de difusão com o negativo do gradiente da densidade de nêutrons n, ou seja,

$$\vec{J} = -D\nabla n. \tag{8}$$

Ou ainda

$$\vec{J} = -D\nabla\phi, \tag{9}$$

em que D é o coeficiente de difusão (vamos considerá-lo independente das coordenadas). A Equqação (9) é conhecida como lei de Fick.

Na sequência, vamos substituir a Equação (9) na Equação (7), obtendo

$$-D\nabla^2\phi + \Sigma_a\phi(x, y, z) = \nu\Sigma_f\phi(x, y, z) + Q(x, y, z), \tag{10}$$

ou

$$-D\nabla^2 n + \Sigma_a n = \nu\Sigma_f n + Q(x, y, z), \tag{11}$$

donde identificamos o operador laplaciano $\nabla^2\phi = \nabla \cdot (\nabla\phi)$. A Equação (11) (ou Equação (10)) é denominada equação de difusão de nêutrons. Na próxima seção a aplicaremos para descobrir como nêutrons difundem num meio específico.

III. APLICAÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO A UM SISTEMA NÃO-MULTIPLICADOR

Nesta seção, aplicaremos a equação de nêutrons a um sistema no qual não há multiplicação de nêutrons, ou seja, não há átomos suscetíveis a fissão, o que impede a produção de novos nêutrons. Nessa situação, o termo $\nu\Sigma_f n(x, y, z)v$ da Equação(11) deixa de existir. Consideraremos um modelo unidimensional consistindo de um placa infinita localizada no plano $y - z$ que emite Q nêutrons por segundo a uma taxa constante e unformemente em todas as direções. Nossa meta é descobrir como a densidade de nêutrons n depende da coordenada x. Para esse fim, consideraremos a origem do eixo x, ou seja $x = 0$, na posição da placa. Assim, a fonte de nêutrons está em $x = 0$. A fim de simplificarmos a resolução, consideraremos a solução apenas na região $x > 0$. Assim, na solução matemática, a fonte será tratada como uma condição de contorno, ou seja, $J_x(0) = Q/2$. O fator 2 dividindo Q decorre do fato de a fonte emitir igualmente para $x > 0$ e para $x < 0$. A equação fica dada então por

$$-D\frac{d^2n(x)}{dx^2} + \Sigma_a n(x) = 0. \tag{12}$$

Se reorganizarmos os termos da Equação (12) e definirmos o comprimento de difusão $L^2 = D/\Sigma_a$, chegamos a

$$\frac{d^2n(x)}{dx^2} - \frac{1}{L^2}n(x) = 0. \tag{13}$$

Note que a Equação (13) é linear e homogênea, logo é natural procurarmos soluções da forma $n(x) = e^{\alpha x}$, em que α é uma constante. Derivando duas vezes $n(x)$ dado e substituindo na Equação (13), obtemos a equação característica

$$\alpha^2 - \frac{1}{L^2} = 0,$$

cuja solução é $\alpha_1 = 1/L$ e $\alpha_2 = -1/L$. Dessa forma,

$$n(x) = c_1e^{\alpha x} + c_2e^{-\alpha x}. \tag{14}$$

Como estamos resolvendo a equação na região $x > 0$, devemos escolher $c_1 = 0$ para a evitar a divergência de $n(x)$. E então,

$$n(x) = c_2e^{-\alpha x}.. \tag{15}$$

Para encontrarmos a constante c_2, utilizaremos a condição de contorno dada por $J_x(0) = Q/2$. Uma vez que a lei de Fick nos diz que

$$J_x(x) = -D\frac{dn(x)}{dx},$$

e $\frac{dn}{dx} = -c_2\alpha e^{-\alpha x}$, temos que $J_x(0) = -c_2\alpha$. Assim,

$$c_2\alpha D = \frac{Q}{2},$$

ou seja

$$c_2 = \frac{Q}{2\alpha D}.$$

Lembrando que $\alpha = 1/L$, a solução do problema fica dada por

$$n(x) = \frac{QL}{2D}e^{-\alpha x}. \tag{16}$$

A Equação (16) nos diz que quando nêutrons adentram numa região meramente absorvedora, a sua densidade decai exponencialmente com a distância.

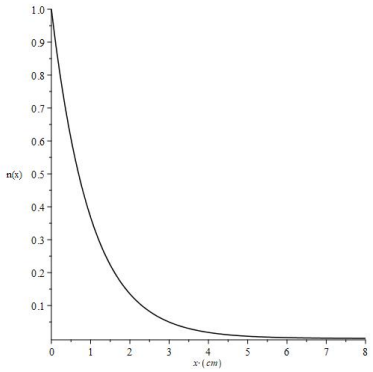

Figura 2. Gráfico da densidade de nêutrons $n(x)$ numa região absorvedora (Equação (16)), considerando $Q = 1cm^{-2}s^{-1}$, $L = 2cm$ e $D = 1cm^{-2}s^{-1}$.

O gráfico esboçado na Figura (3) mostra o comportamento de $n(x)$.

IV. A EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DE NÊUTRONS E O TAMANHO CRÍTICO DE REATORES NUCLEARES DE FISSÃO

Nesta seção, utilizaremos a equação de nêutrons para calcular o tamanho crítico de um reator nuclear em diferentes geometrias. A análise a ser realizada seguirá a Equação (11) com algumas modificações que serão explicadas a seguir. Primeiramente, nos recordemos do conceito do fator de multiplicação. O fator de multiplicação é definido por

$$k = \frac{\text{número de nêutrons na i-ésima+1 geração}}{\text{número de nêutrons na i-ésima geração}}.$$

É importante relembramos ainda que k define se reator está num estado subcrítico ($k < 1$), crítico ($k = 1$) ou supercrítico ($k > 1$). Um reator subcrítico não sustenta a reação de fissão em cadeia, enquanto o supercrítico pode levar o sistema ao estado de desiquilíbrio térmico. É ideal um reator que opere com k próximo da unidade. Nesse caminho, utilizemos ν_0/ν para representar a variação do número médio de nêutrons por fissão ν. Nessa lógica, ν_0 representa o número de nêutrons por fissão que precisaríamos para alcançarmos um sistema crítico ($k = 1$), enquanto ν é o número real de nêutrons produzidos por fissão. Assim, notamos que $1/k = \nu_0\nu$. Assim, a Equação (11), sem a presença de fontes de nêutrons Q, fica dada por

$$-D\nabla^2 n + \Sigma_a n = \left(\frac{nu_o}{nu}\right)\nu\Sigma_f n. \tag{17}$$

Perceba que esta equação contém os termos relativos ao balanço do número de nêutorns, quais sejam: o termo que nos fornece a quantidade de nêutrons que escapam do sistema; o termo relativo aos nêutrons absorvidos; e o termo referente aos nêutrons produzidos por fissão. A Equação (17) pode ser escrita na forma

$$\nabla^2 n + \frac{\Sigma_a}{D}\left(\frac{\nu}{k}\frac{\Sigma_f}{\Sigma_a} - 1\right)n = 0. \tag{18}$$

Contudo, devemos nos recordar que

$$k_\infty = \nu\frac{\Sigma_f}{\Sigma_a}, \tag{19}$$

é o fator de multiplicação k se considerarmos um reator com dimensões muito grandes. Recordando que $L^2 = D/\Sigma_a$, podemos escrever a Equação (18) como

$$\nabla^2 n + \left(\frac{k_\infty/k - 1}{L^2}\right)n = 0. \tag{20}$$

Se definirmos $-\nabla^2 n/n = B^2$, a Equação (20) fica escrita como

$$\nabla^2 n + B^2 n = 0. \tag{21}$$

E ainda, a probabilidade do nêutron não vazar do reator P_{NL} (nonleakage probability) é dada, em termos de B, por

$$P_{NL} = \frac{1}{1 + L^2B^2}. \tag{22}$$

Na sequência, utilizaremos as equações deduzidas nesta seção para determinarmos os tamanhos críticos de reatores nucleares.

A. Reator Esférico

Neste tópico, apresentaremos com detalhes os cálculos para se determinar o raio crítico de um reator cujo núcleo

tenha formato esférico centrado na origem do sistema de eixos coordenados. Nesse percurso, admitiremos que o problema tenha simetria na parte angular, ou seja, a densidade de nêutrons varia apenas radialmente. Assim, se utilizarmos o operador laplaciano em coordenadas esféricas, tomando somente a parte radial, a Equação (21) fica escrita como

$$\frac{d^2n}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dn}{dr} + B^2 n = 0. \tag{23}$$

Para resolver esta equação, tomemos a função $\psi(r) = rn(r)$; a partir da qual encontramos

$$\frac{d\psi}{dr} = n + r\frac{dn}{dr},$$

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} = 2\frac{dn}{dr} + r\frac{d^2n}{dr^2}.$$

Ou seja,

$$\frac{1}{r}\frac{d^2\psi}{dr^2} = \frac{2}{r}\frac{dn}{dr} + \frac{d^2n}{dr^2}.$$

Substituindo esses resultados na Equação (23), obtemos

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + B^2\psi = 0, \tag{24}$$

a qual é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, homogênea e com coeficientes constantes. Logo, sugerimos como solução $\psi(r) = e^{\alpha r}$, cuja derivada segunda é $\frac{d^2\psi}{dr^2} = \alpha^2 e^{\alpha r}$. Assim, se substituirmos esses resultados na Equação (24), obtemos a equação característica

$$\alpha^2 = -B^2,$$

cujas raízes são $\alpha_1 = iB$ e $\alpha_2 = -iB$. Dessa forma, a solução da Equação (24) fica dada na forma

$$\psi(r) = A_1 e^{iBr} + A_2 e^{-iBr}.$$

Se utilizarmos a relação de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, $\psi(r)$ fica dado por

$$\psi(r) = C_1\cos(Br) + C_2\sin(Br),$$

donde $C_1 = A_1 + A_2$ e $C_2 = i(A_1 - A_2)$ são constantes. A densidade de nêutrons é dada por $n(r) = \psi(r)/r$, logo

$$n(r) = C_1\frac{cos(Br)}{r} + C_2\frac{sin(Br)}{r}.$$

O problema envolve a origem, logo $n(r)$ deve ser finito em $r = 0$. Temos que $\frac{sin(Br)}{r}$ tende a 1 quando r tende a zero, enquanto $\frac{cos(Br)}{r}$ diverge quando r, tende a zero. Assim, devemos escolher $C_1 = 0$. E, assim,

$$n(r) = C_2\frac{sin(Br)}{r}. \tag{25}$$

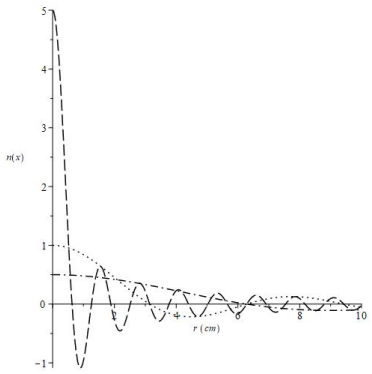

Figura 3. Gráfico da densidade de nêutrons $n(r)$ para um reator esférico (Equação (25)), considerando $B = 1/2cm^{-2}$ (ponto-reta), $B = 1cm^{-2}$ (ponto) e $B = 5cm^{-2}$ (reta).

O gráfico esboçado na Figura (3) mostra o comportamento de $n(r)$. Notemos que à medida que B aumenta, o tamanho crítico do reator diminui.

Neste momento, utilizemos a condição de fronteira que a densidade de nêutrons deve se anular na parede do reator, ou seja, $n(r)$ é zero em $r = R$, ou seja, $n(R) = 0$. Usando este fato na Equação (25), obtemos

$$c_2\frac{sin(BR)}{R} = 0, \qquad m = 1, 2, 3, ... \tag{26}$$

o que só é possível se

$$BR = m\pi, \qquad m = 1, 2, 3, ...$$

Este último resultado pode nos fornece o raio crítico de um reator para sustestar uma reação em cadeia. Para isso, tomemos $m = 1$,pois queremos o menor valor de R, isto é,

$$R = \frac{\pi}{B}. \tag{27}$$

Lembremos que B depende somente dos constituintes que são utilizados no reator. A Equação (27) nos fornece o raio crítico de uma reator de fissão de formato esférico.

B. Reator Cilíndrico

Neste espaço, determinaremos o raio crítico de um reator cilíndrico de comprimento infinito. Consideraremos o cilindro com centro na origem dos eixos coordenados. Consideraremos que a densidade de nêutrons possui simetria em relação ao ângulo polar. Nesse sentido, tomaremos o laplaciano em coordenadas cilíndricas, considerando somente a parte radial. Dessa forma, a Equação (21) fica escrita como

$$\frac{d^2n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dn}{dr} + B^2 n = 0. \tag{28}$$

Essa equação é bastante conhecida na literatura de física-matemática. A fim de reconhecê-la considere a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(\kappa^2 - \frac{m^2}{x^2}y\right) = 0. \tag{29}$$

A Equação (29) é conhecida como equação diferencial de Bessel de ordem m, e sua solução é da forma

$$y(x) = c_1 J_m(\kappa x) + c_2 N_m(\kappa x).$$

As funções $J_m(\kappa x)$ e $N_m(\kappa x)$ são conhecidas, respectivamente, como funções de Bessel de primeira e segunda espécie. No caso considerado na Equação (28), temos que $m = 0$, e então,

$$n(r) = c_1 J_0(Br) + c_2 N_0(Br).$$

Porém, a função $N_0(Br)$ diverge em $r = 0$; por isso, devemos escolher $c_2 = 0$. E a solução do problema ficada dada por

$$n(r) = c_1 J_0(Br). \tag{30}$$

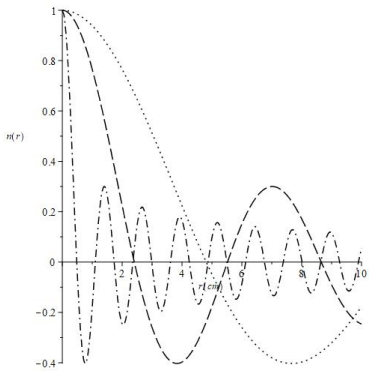

Figura 4. Gráfico da densidade de nêutrons $n(r)$ para um reator cilíndrico (Equação (25)), considerando $B = 1/2cm^{-2}$ (ponto), $B = 1cm^{-2}$ (reta) e $B = 5cm^{-2}$ (ponto-reta).

O gráfico esboçado na Figura (4) mostra o comportamento de $n(r)$. Notemos que, assim como no caso do reator esférico, à medida que B aumenta, o tamanho crítico do reator diminui. O raio crítico de um reator cilíndrico é obtido se considerarmos a condição de fornteira $n(R) = 0$, ou seja, a densidade de nêutrons nula nas paredes do cilindro. Isso nos fornece

$$J_0(Br) = 0.$$

Por sorte, a literatura nos fornece as raízes da função de Bessel, neste caso, da função de Bessel de ordem zero. Como queremos o raio crítico, basta tormarmos a primeira raíz, que é igual a $2,4048$. Assim, $BR = 2,4048$. Dessa forma, encontramos para o raio crítico

$$R = \frac{2,4048}{B}. \tag{31}$$

E assim, mais uma vez, obtemos o raio crítico em termos da constante B, a qual está relacionada com as substâncias usadas no reator (combustível, moderador, etc).

V. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo do trabalho, a equação de difusão de nêutrons foi deduzida e analisada de forma pedagógica. A partir desta análise, algumas aplicações simples foram implementadas, tais quais o cálculo do raio crítico de reatores térmicos nos formatos cilíndricos e esféricos. Como perspectiva, almejamos realizar transposições didáticas para abordagens mais complexas deste mesmo problema. Por enquanto, deixamos aos leitores o estudo de situações que abordem grupos de nêutrons de diferentes energias, bem como sistemas em que a parede dos reatores sejam refletoras.

[1] J.C. Lee, "Nuclear Engineering," Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering, W5211, 3rd ed., Wiley (2016).

[2] Anthony, H. D. Science and its background. London, 1948.
[3] Carus, T. L., Watson, J. S. On the nature of things. H. G. Bohn, 1851.
[4] Vlahos, L., Isliker, H., Kominis, Y., Hizanidis, K. Normal and anomalous diffusion: a tutorial. 2008.
[5] W.M. Stacey, Nuclear Reactor Physics, Wiley (2001).
[6] G.I. Bell and S. Glasstone, Nuclear Reactor Theory, Van Nostrand Reinhold (1970).
[7] E.E. Lewis, Fundamentals of Nuclear Reactor Physics, Academic Press (2008).