



## Utilização do *software* GeoGebra no ensino de Física Quântica

Mateus Antônio Resende\* and Marco Antônio Pantoja Maciel†  
*Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins - IFTO, Campus Palmas.*

A utilização de simulações computacionais no ensino de Física tem sido alvo de muitas pesquisas nos últimos tempos e diversos *softwares* foram desenvolvidos para auxiliar no processo de ensino e aprendizagem, tanto da Física como das Ciências, de maneira geral. O GeoGebra é uma ferramenta interativa de simulações matemáticas bastante conhecido, com um ambiente que combina elementos de álgebra e geometria, é de fácil programação e observação dos dados nele inseridos. Nós o utilizamos para simular resultados fundamentais da Física Quântica, como a catástrofe do ultravioleta, o efeito Compton e o átomo de hidrogênio. A teoria quântica não é apenas tecnicamente difícil, mas conceitualmente rica, os resultados aqui apresentados demonstram a simplicidade de uso e os inúmeros detalhes que podem vir a ser trabalhados por meio da ferramenta. Com isso, somos induzidos a imaginar que ela pode ser ainda utilizada nas demais áreas da Física, com diferentes enfoques, uma vez que se trata de um *software* com diversas funcionalidades.

**Palavras-chave:** Simulações computacionais, GeoGebra, tecnologias na educação.

### I. INTRODUÇÃO

O primeiro estudo com a utilização de computadores como recurso didático ocorreu na década de 1970 no Massachusetts Institute of Technology (MIT), nos Estados Unidos. Na época, Seymour Papert, que havia trabalhado com Piaget em Genebra, fundou o Laboratório de Inteligência Artificial. Papert, apoiado nas ideias de Piaget sobre o desenvolvimento cognitivo das crianças, desenvolveu uma série de atividades integrando problemas matemáticos à programação de computadores [1]. Desde então, inúmeros estudos vêm sendo desenvolvidos com o intuito de criar estratégias pedagógicas que permitam a utilização de meios tecnológicos e midiáticos nas práticas de ensino [2].

Apesar de presente nas modalidades de educação a distância, na qual o uso de ambientes virtuais de aprendizagem é mais comum, embora o aproveitamento ainda se mostre reduzido em alguns casos, na modalidade presencial a utilização de recursos computacionais é pouco difundida. A adaptação do ambiente escolar ao uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC's) ainda é um desafio a ser superado, cujo maior obstáculo talvez esteja na falta de preparo dos educadores para lidar com essas novas ferramentas que estão em constante atualização. Essa dificuldade em lidar com as TIC's é causada principalmente pelo fato de que a maioria dos professores

tiveram contato com elas tardiamente, os chamados imigrantes digitais, ao contrário dos alunos, que já nasceram nesse ambiente, denominados de nativos digitais. Por isso, é necessário desenvolver estratégias de ensino que insiram essas novas tecnologias nas práticas pedagógicas e que auxiliem professores e alunos no desenvolvimento de competências básicas para o uso desses ambientes [3].

No ensino médio, a inserção de aplicativos, softwares e ferramentas tecnológicas em geral, é bem difundida. Isso se dá pela busca incessante em desenvolver o interesse do estudante pela área, incentivar a busca por conhecimento e aprofundamento através dessas ferramentas, e ainda, tentar aumentar virtualmente a carga horária da disciplina de Física, que tem sido reduzida ao longo dos últimos anos [4]. Já no ensino superior, por vezes acreditamos que, tendo feito a escolha daquele curso, o aluno não precisa mais ser estimulado e, com isso, nos deparamos com disciplinas maçantes, com excesso de conteúdo, poucas discussões e ainda menos aplicações.

O uso dos recursos computacionais certamente terá cada vez mais impacto na educação. Acreditamos que uma forma de contribuir com a aprendizagem de conceitos complexos da Física estudada no ensino superior seja trazendo metodologias diferenciadas que estimulem o estudante. Nesse sentido, apresentamos nesse relato uma estratégia didática para ensinar alguns conteúdos de Física Quântica com o apoio de uma TIC, o GeoGebra. Um software livre, que une gráficos, geometria, elementos tridimensionais, álgebra computacional, entre outras ferramentas, todas inseridas numa multiplataforma que pode ser utilizada para todos os níveis de ensino.

O estudo da Física Quântica exige habilidade e con-

---

\* mateus.ufsj@gmail.com

† fisicapantoja@gmail.com

hecimento matemático, bem como a capacidade de compreender conceitos e modelos abstratos. As ideias envolvidas representam um desafio constante em que o estudante do curso de graduação em Física precisa visualizar a natureza contra-intuitiva de um mundo de escala subatômica [5]. Portanto, aprender sobre esse tema significa ser capaz de analisar, interpretar e ainda correlacionar as diversas informações fundamentais para a construção da teoria e da base matemática que estruturou o que conhecemos sobre os fenômenos quânticos. E ainda, num mundo globalizado onde o compartilhamento de informações em redes sociais é cada vez mais rápido, o que leva a disseminação de pseudociências e termos utilizados de forma a reforçar crenças e práticas que não atendem a metodologias científicas, precisamos desenvolver meios e métodos que facilitem e universalizem a correta compreensão e uso dos conceitos estudados aqui [6].

Nesse aspecto, as simulações computacionais podem ser de grande ajuda para os estudantes. A utilização das TIC's vem nos auxiliando no processo de ensino-aprendizagem e, aliado a um bom desenvolvimento dos conceitos teóricos, torna possível a discussão de temas complexos em níveis cada vez mais altos e em idades cada vez menores, fazendo uso inclusive, das próprias redes sociais para a divulgação de material acerca do assunto [7].

O trabalho está organizado na seguinte forma: na seção II apresentamos alguns pontos sobre o ensino de Física Quântica. Na seção III mostramos as funcionalidades do *software*, suas principais características e algumas aplicações realizadas, com a metodologia e comentários sobre os resultados que obtivemos. As considerações finais são apresentadas na seção IV.

## II. O ENSINO DE FÍSICA QUÂNTICA

O surgimento da Física Quântica transformou a forma como entendíamos o método científico. A maneira de produzir ciência foi totalmente impactada e isso nos trouxe, e traz, diversas descobertas que impactam em tecnologias cada vez mais surpreendentes, onde grande parte delas possui a teoria quântica como base de sustentação, como é o caso da Física Nuclear, da Teoria Geral de Partículas e Campos, da Matéria Condensada, entre outras, que influenciaram no desenvolvimento recente de dispositivos eletrônicos, na Nanotecnologia e na área da saúde.

As disciplinas de teoria quântica passaram então a ter lugar garantido nos cursos de graduação em Física e lugar de destaque nas pós-graduações. As abordagens típicas dos cursos tradicionais, no entanto, costumam focar em aspectos históricos, diferenças com as concepções clássicas e apresentação de novos modelos e equações, o que muito pouco se conecta com aspectos fenomenológicos e que acabam se distanciando muito da realidade das principais aplicações da teoria. Talvez por isso, uma busca intensa pelo desenvolvimento de novas estratégias didáticas vem acontecendo e cada vez mais vemos esse tema sendo discutido nos congressos e revis-

tas de ensino de Física. Neles, a Física se mistura a computação, a arte e até mesmo às histórias em quadrinhos, tudo para que professores e alunos tenham instrumentos diversos que possam auxiliar o processo de ensino-aprendizagem [8–11].

Os apontamentos que levaram à elaboração desse trabalho surgiram no decorrer das disciplinas de Física Moderna e Mecânica Quântica, do sexto e sétimo períodos, respectivamente, da graduação em Licenciatura em Física do Instituto Federal do Tocantins, campus Palmas. Na ocasião, foram utilizados os livros textos “Física Quântica - Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas” de Eisberg e Resnick [12] e “Mecânica Quântica” de Griffiths [13], tradicionais obras de cursos introdutórios. Notamos que vários segmentos de ambos os livros deixavam lacunas que poderiam ser exploradas se utilizado o mecanismo correto. Nossa ideia aqui não é focar em discussões conceituais. Para isso, inclusive, recomendamos a leitura da proposta [14]. Discutimos nesse texto uma forma de utilizar um *software* para dar mais autonomia ao estudante, para que assim ele possa interagir ativamente com os conteúdos. O uso do GeoGebra representa para nós uma espécie de laboratório portátil de Física Quântica, onde simulações e gráficos podem ser desenvolvidos e trabalhados para verificarmos a teoria e, com isso, tornarmos mais dinâmico o entendimento de tudo o que aprendemos em sala de aula.

Estudar um assunto tão complexo requer um olhar diferenciado para a forma como a teoria foi construída e desenvolvida ao longo dos anos. É necessário revisitarmos o passado constantemente para que possamos juntar as peças que compuseram essa parte da Física tão complexa e ao mesmo tempo tão admirável. É fundamental que sigamos a cronologia dos fatos para que tenhamos mais facilidade em conectar os acontecimentos e as contribuições que cada um acrescentou naquele momento. Ou seja, precisamos acompanhar a evolução das ideias da Física. Mas, como observadores do século XXI, devemos utilizar nossas ferramentas para interagir com as descobertas durante essa evolução, tudo isso para que possamos extrair o máximo de informações do conteúdo. Assim como arqueólogos utilizam da tecnologia para estudar o comportamento dos povos da antiguidade através da análise de objetos materiais de tempos remotos.

Quando estudamos, por exemplo, a previsão de Rayleigh-Jeans para a densidade de energia de uma cavidade de corpo negro e comparamos aos resultados experimentais, o que chamamos de catástrofe do ultravioleta, devido a grande discordância dos resultados teóricos e experimentais, temos o famoso gráfico que sempre é apresentado. No entanto, desejamos que a interação entre professor, estudante e simulação, permita que seja possível obter esse mesmo gráfico juntos e, além disso, variar parâmetros e ver como ele se comporta, o que de fato altera as curvas do gráfico e onde a antiga previsão teórica começa a falhar. As equações serão apresentadas da mesma forma, podemos alterar apenas a metodologia, onde agora o estudante irá programar o GeoGebra

para que ele construa os gráficos referentes ao fenômeno e possa obter, inclusive, o resultado descoberto por Planck, considerado por muitos o ponto inicial da abordagem quântica.

No efeito Compton, causado pelo espalhamento da luz por um elétron e a consequente diferença de energia entre o fóton espalhado e o fóton incidente, podemos simplesmente mostrar a imagem da colisão e deduzir a equação de Compton através das leis de conservação do momento e da energia, como tradicionalmente é feito. Queremos, no entanto, produzir a simulação dessa colisão para que possamos estudar o comportamento do fóton e do elétron após o choque, alterar a energia do fóton incidente, variar o ângulo do fóton espalhado, mostrar que o aumento no comprimento de onda independe do comprimento de onda inicial, entre outras características do fenômeno. Se por um lado ter um aparelho de raios-x para exemplificar isso, foge da realidade da maior parte das classes de graduação, trabalhar com a simulação que requer apenas um computador e um programa, parece bem mais factível a todos.

Temos ainda uma das situações conceituais mais desafiadoras do ensino desse conteúdo nos cursos introdutórios, que é a interpretação probabilística de Born, onde associamos a função de onda de uma partícula com a probabilidade de encontrarmos essa partícula em uma certa região do espaço. A passagem da interpretação determinística Newtoniana para essa, não é simples, uma vez que estamos conectando um elemento abstrato da teoria, a função de onda, com um observável, a posição. Nesse ponto, uma ferramenta como o Geogebra que permite representar graficamente as regiões do espaço, explorar os locais de diferentes probabilidades, e ainda colaborar com a resolução da equação de Schrödinger, pode ser um diferencial na metodologia de ensino.

As possibilidades são inúmeras e se estendem para muito além das páginas desse trabalho. Na próxima seção, apresentaremos algumas funções básicas do software, sua interface, funcionalidades, barras de comando e, principalmente, como o utilizamos para trabalhar os conteúdos citados acima e outros mais.

### III. GEOGEBRA

A interface gráfica inicial do GeoGebra pode ser visualizada na Figura 1. Ao longo desse trabalho, apresentaremos cinco simulações, em que quatro delas utilizam-se da opção de gráfico, e uma delas, da janela 3D. Portanto, ao iniciar a construção da simulação deve-se selecionar a opção desejada no canto à direita do programa.

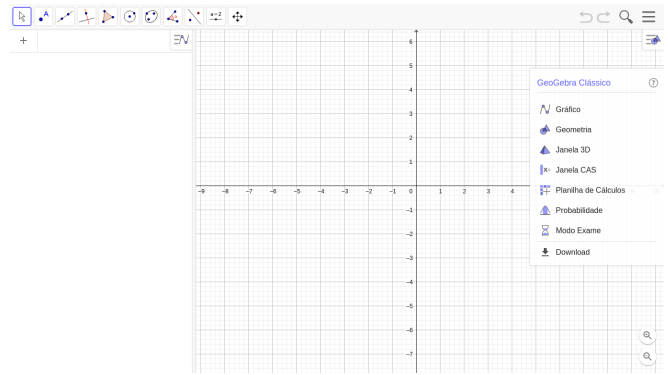


Figure 1: Interface gráfica do *software* GeoGebra. Legenda: essa é a tela inicial do *software* GeoGebra ao ser iniciado.

Como pode ser visto na Figura 1, a barra superior do aplicativo apresenta diversas funcionalidades. Ao colocar o mouse em alguma dessas opções, abre-se uma gama de novas opções dentro de cada uma delas<sup>1</sup>, conforme pode ser visto na Figura 2, que foi obtida ao deixar o mouse na segunda opção.

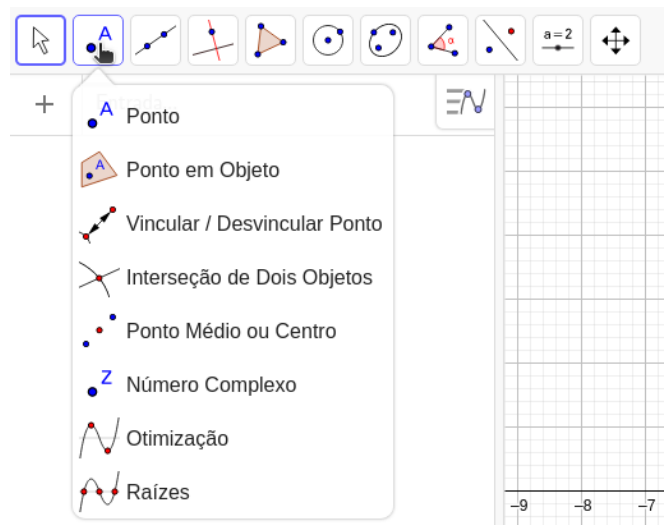


Figure 2: Opções da barra superior do GeoGebra. Legenda: essa é a barra superior que aparece na tela inicial do *software*. Por meio dela, pode-se utilizar de alguns recursos mais facilmente que por comandos.

Ao longo desse trabalho, a janela de álgebra foi amplamente utilizada. Por meio dela, inserem-se as funções de entrada no *software*. De modo muito simples, ela pode ser acionada com um único clique na barra de entrada, conforme pode ser visualizado na Figura 3, logo abaixo.

<sup>1</sup> Recomenda-se fortemente que o leitor explore cada uma dessas opções para adquirir maior familiaridade com o *software*.

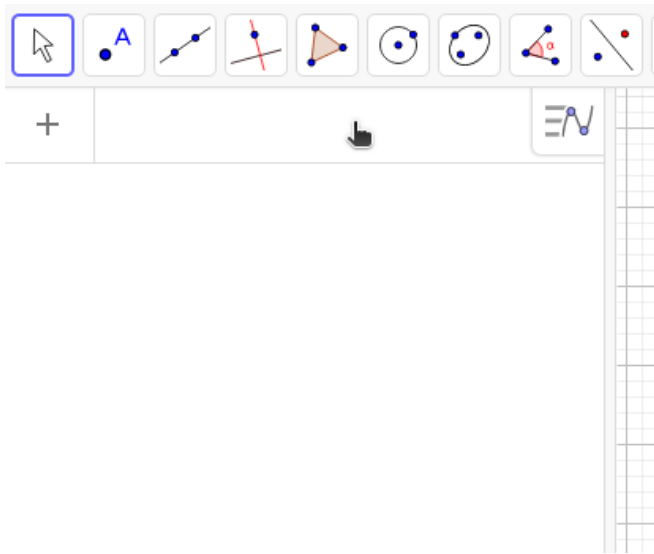


Figure 3: Janela de álgebra do GeoGebra. Legenda: por meio dessa janela se inserem os comandos na linguagem que o GeoGebra interpreta.

Todas as funções que foram inseridas no aplicativo por meio dessa janela, foram escritas de acordo com a linguagem de comandos do GeoGebra, que é uma linguagem bem intuitiva. Por exemplo, para soma e subtração utilizou-se das teclas + e -, enquanto que / foi utilizada para divisão e um espaço para multiplicação. Além disso, ele também reconhece algumas constantes bem conhecidas, como  $\pi$ , que o *software* reconhece ao escrever pi na janela de álgebra e o número de Euler, ao escrever a letra e.

Essas são as principais funcionalidades do *software* que foram utilizadas para a construção das simulações que apresentaremos nesse trabalho. Portanto, na subseção que se segue, pode-se verificar os resultados obtidos e acompanhar a construção de cada uma das simulações realizadas por meio dos boxes apresentados. Neles, todas as etapas estão expostas para a reprodução de cada uma das simulações.

## A. Simulações

### 1. Catástrofe do ultravioleta

A primeira simulação, apresentada na Figura 4, refere-se à catástrofe do ultravioleta. Nela, é possível fazer uma comparação entre as soluções clássica e quântica, e como elas diferem entre si. As linhas contínuas representam a solução quântica para temperaturas diferentes, obtidas pela equação de Planck, e a solução clássica, indicada pela curva tracejada, obtido pela equação de Rayleigh-Jeans.

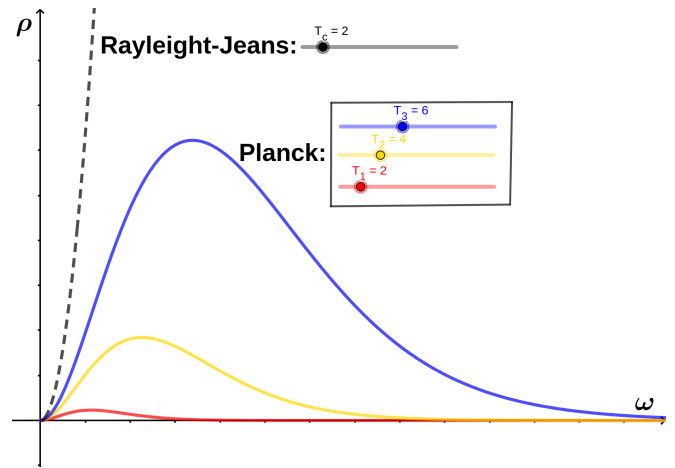


Figure 4: Catástrofe do ultravioleta. Legenda: as áreas sobre os gráficos representam a energia total emitida. Para a curva tracejada, a energia tende ao infinito.

Utilizamos a convenção  $c = \hbar = k_B = 1$ , ou seja, utilizamos do Sistema Natural de Unidades, em que  $c$  representa a velocidade da luz no vácuo,  $\hbar$  a constante de Planck dividida por  $2\pi$ , e  $k_B$  a constante de Boltzmann. Podemos observar que a medida em que se altera o valor da temperatura<sup>2</sup> por meio do controle deslizante, as curvas sofrem alterações no seu comportamento, mas mantendo a mesma estrutura, o que de fato nos interessa.

De maneira geral, a catástrofe do ultravioleta é um dos primeiros assuntos a serem tratados em cursos introdutórios de Física Quântica, de modo que a simulação apresentada na figura 4, pode ser utilizada para facilitar a compreensão do fenômeno, mostrando a grande discrepância dos resultados quando se leva em consideração as soluções clássica e quântica para o problema. Para enriquecer ainda mais a simulação, caso seja de interesse do leitor, dados experimentais podem ser inseridos no *software* por meio de pontos<sup>3</sup>, e assim, ele pode visualizar qual solução descreve melhor o fenômeno.

Logo, para a construção da simulação, levou-se em consideração a equação de Planck para o corpo negro, que é dada por [13]:

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3(e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1)}. \quad (1)$$

Em que  $\rho$  é a densidade de energia e  $\omega$  é a frequência dos fótons multiplicada por  $2\pi$ . Portanto, considerando  $c = \hbar = k_B = 1$ , essa equação sofreu a seguinte adaptação para ser utilizada no *software*:

$$\rho(\omega) = \frac{\omega^3}{\pi^2(e^{\frac{\omega}{T}} - 1)}. \quad (2)$$

<sup>2</sup> Que está fora de escala, em comparação com valores experimentais, devido à convenção adotada.

<sup>3</sup> Desde que as funções e os dados experimentais estejam no mesmo sistema de unidades, como o Sistema Natural de Unidades, por exemplo.

Entretanto, para facilitar o manuseio da ferramenta, a função utilizada no *software* foi dada em termos de  $x$  e não de  $\omega$ , tornando necessário trocar  $\omega$  por  $x$  nessa expressão (e, portanto,  $\rho(\omega)$  por  $f(x)$ ). Logo, a construção da simulação levou em consideração a seguinte função:

$$f(x) = \frac{x^3}{\pi^2(e^{\frac{x}{T}} - 1)}. \quad (3)$$

Por outro lado, a equação de Rayleigh-Jeans é dada por [12]:

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi\nu^2 k_B T}{c^3}, \quad (4)$$

onde, considerando  $\omega \equiv 2\pi\nu$ , temos:

$$\rho(\omega) = \frac{2\omega^2 k_B T}{\pi c^3}. \quad (5)$$

De modo análogo ao que foi feito anteriormente, apenas trocando  $\omega$  por  $x$  para facilitar o manuseio da ferramenta, temos a seguinte função:

$$g(x) = \frac{2x^2 T}{\pi}. \quad (6)$$

O passo-a-passo para a construção geral da simulação pode ser visualizado no Box 1. Ao seguir os passos apresentados nesse Box, assim como em todos os outros desse trabalho, não se constroem as simulações tal como elas estão apresentadas nas figuras. Para isso, será necessário alterar algumas características visuais nas configurações, como: a retirada da malha do fundo, alterar a coloração, espessura e tipo de linha na função, além de outras características particulares de cada simulação.

**Box 1: construção da simulação 1.**

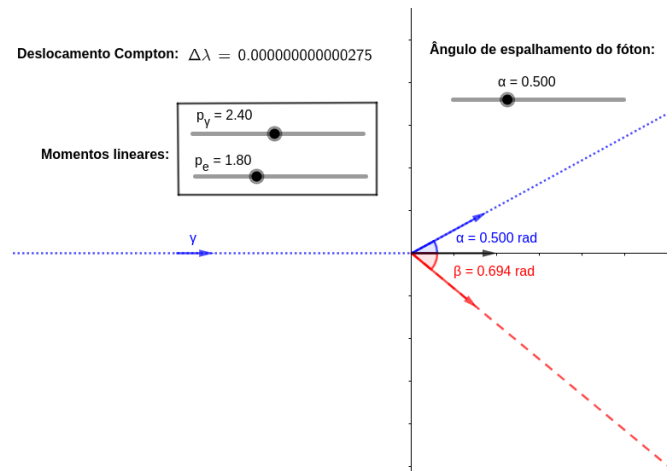
1. Escreva, na janela de álgebra, quatro controle deslizantes para as temperaturas  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_c$ , e altere, nas configurações, para que variem de 0 a 15 com incremento 1.
2. Use o comando:  
 $\text{Se}(\langle \text{Condição} \rangle, \langle \text{Então} \rangle),$   
 com:  $\left\{ \begin{array}{l} \langle \text{Condição} \rangle: x > 0 \\ \langle \text{Então} \rangle: \frac{x^3}{\pi^2(e^{\frac{x}{T_1}} - 1)}. \end{array} \right.$
3. Repita o passo 2, porém usando as temperaturas  $T_2$  e  $T_3$ .
4. Use novamente o comando:  
 $\text{Se}(\langle \text{Condição} \rangle, \langle \text{Então} \rangle),$   
 com:  $\left\{ \begin{array}{l} \langle \text{Condição} \rangle: x > 0 \\ \langle \text{Então} \rangle: \frac{2x^2 T_c}{\pi}. \end{array} \right.$
5. Altere as posições dos controles deslizantes para perceber o comportamento de cada gráfico individualmente.

2. Efeito Compton

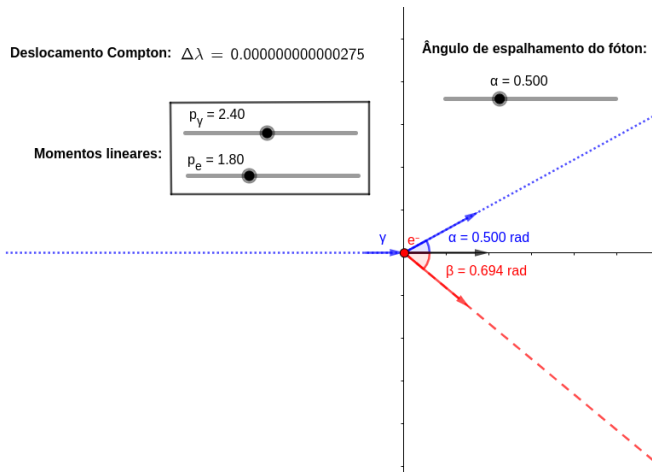
A segunda simulação realizada foi do efeito Compton. Esse fenômeno foi descrito por Arthur Compton ao observar o espalhamento de raios-x em alvos de grafita [15]. Nele, leva-se em consideração o comportamento corpuscular da luz e trata o fenômeno como uma colisão, entre os fótons de raios-x, que possuem energia e momento bem definidos, com os elétrons do material, com uma energia de repouso também definida. Desse modo, Compton conseguiu descrever o comportamento do fóton espalhado (por meio do ângulo de espalhamento) ao colidir com o elétron, levando em consideração tanto a Relatividade Restrita, quanto a MQ, uma vez que os fótons estão à velocidade  $c$  da luz e possuem uma energia  $h\nu$ . A equação que Compton obteve para essa descrição, foi:

$$\Delta\lambda = \lambda_C(1 - \cos(\theta)). \quad (7)$$

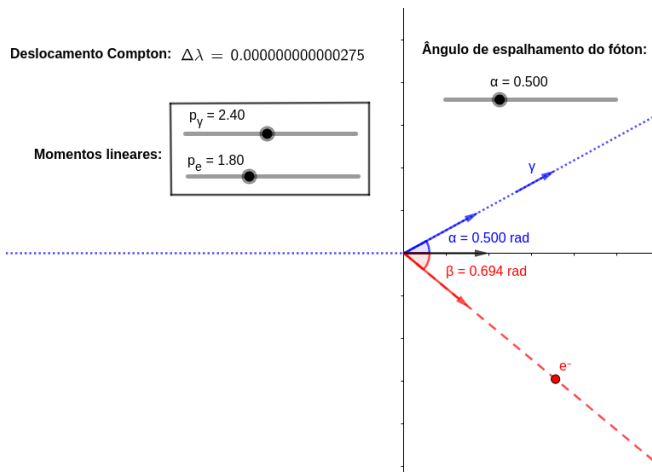
Nela,  $\lambda_C \equiv h/m_e c$ , em que  $h$  é a constante de Planck,  $m_e$  é a massa do elétron e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. Numericamente,  $\lambda_C \approx 2,426 \times 10^{-12} \text{ m}$ . Além disso, nessa equação,  $\theta$  é o ângulo de espalhamento do fóton. Desse modo, a simulação realizada, que pode ser visualizada na Figura 5, leva em consideração esse ângulo de espalhamento.



(a) Antes da colisão.



(b) Durante a colisão.



(c) Após a colisão.

Figure 5: Efeito Compton. Legenda: as linhas azuis representam a trajetória percorrida pelo fóton, enquanto a linha vermelha representa a trajetória do elétron de recuo.

Na simulação, é possível ver todas as trajetórias envolvidas, tanto do fóton antes e depois da colisão, quanto a trajetória do elétron de recuo<sup>4</sup>. Com isso, a trajetória em azul indica o “caminho” percorrido pelo fóton, enquanto a linha vermelha representa a trajetória do elétron de recuo, bem como os objetos sobre as curvas representam o fóton e o elétron, seguindo o mesmo padrão de coloração. A simulação da Figura 5 é dinâmica, permitindo a visualização completa da colisão, pois o elétron só passa a se movimentar a partir do instante em que ele e o fóton colidem.

<sup>4</sup> É importante ressaltar que o conceito de trajetória não é bem definido na MQ, entretanto, a simulação aqui apresentada tem propósitos didáticos e segue os mesmos padrões das ilustrações bem conhecidas da literatura no que diz respeito ao efeito Compton, como a apresentada em [15].

A simulação aqui apresentada pode ser utilizada para enriquecer ainda mais as discussões referentes a esse fenômeno, tornando-o mais visual e permitindo verificar as relações entre os ângulos de espalhamento do fóton e do elétron de recuo simultaneamente.

Ao tratar esse fenômeno como uma colisão, o momento linear deve ser conservado. Portanto, como o momento linear é uma grandeza vetorial, seus componentes se conservam separadamente, de tal modo que, para o componente vertical da Figura 5, temos:

$$p_\gamma \text{sen}(\theta) - p_e \text{sen}(\beta) = 0, \quad (8)$$

Essa relação se dá em detrimento do momento linear vertical ser nulo antes da colisão, uma vez que, antes da colisão, o fóton da Figura 5 se movimenta unicamente na direção horizontal. Portanto, para que essa grandeza seja conservada, deve-se permanecer nula após a colisão. Na equação 8,  $p_\gamma$  é o módulo do momento linear do fóton,  $p_e$  é o módulo do momento linear do elétron de recuo,  $\theta$  é o ângulo de espalhamento do fóton e  $\beta$  é o ângulo de espalhamento do elétron de recuo. Logo, pela equação 8, a relação entre os ângulos de espalhamento do elétron e do fóton é dada por:

$$\beta = \arcsen\left(\frac{p_\gamma}{p_e} \text{sen}(\theta)\right). \quad (9)$$

Para a elaboração da simulação, levou-se em consideração essa relação entre os ângulos de espalhamento. O passo-a-passo geral para a elaboração dessa simulação pode ser visualizado no Box 2. Ao seguir os passos do Box 2, fará a simulação de maneira geral, mas não criará os mesmos aspectos estéticos do que foi apresentado na Figura 5. Para isso, será necessário fazer algumas modificações nas configurações de cada objetivo inserido, como a alteração na coloração das funções e no seu tipo de tracejamento. Além disso, recomenda-se que se retirem alguns dos objetos auxiliares da janela de visualização, pois estes podem sobrecarregar o aspecto visual da simulação. Também é recomendável que se altere, nas configurações do GeoGebra, o arredondamento para 3 algarismo significativos, caso contrário, o *software* pode não reconhecer o valor do deslocamento Compton, uma vez que este é muito pequeno.

## Box 2: construção da simulação 2.

1. Insira os controles deslizantes  $\alpha$ ,  $p_\gamma$  e  $p_e$ , com intervalos<sup>a</sup>: 
$$\begin{cases} \alpha : [0, \frac{\pi}{2}], \\ p_\gamma : [0, 5], \\ p_e : [0, 5]. \end{cases}$$
2. Defina  $a$  como a razão  $p_\gamma/p_e$ .
3. Adicione 3 vetores em coordenadas polares, por meio dos comandos:  $v = (2; \alpha)$ ,  $u = (2; -\arcsen(a \cdot \text{sen}(\alpha)))$  e  $w = (2; 0)$ <sup>b</sup>.
4. Adicione dois ângulos entre os vetores, por meio do comando  $\text{Ângulo}(\langle \text{Vetor} \rangle, \langle \text{Vetor} \rangle)$ , com:  $\text{Ângulo}(w, v)$ ,  $\text{Ângulo}(u, w)$ .
5. Defina duas semirretas por meio do comando  $\text{Semirreta}(\langle \text{Ponto Inicial} \rangle, \langle \text{Vetor Diretor} \rangle)$ , ou seja: 
$$\begin{cases} \text{Semirreta}((0,0), v), \\ \text{Semirreta}((0,0), u). \end{cases}$$
6. Defina uma função  $h(x) = 0$ .
7. Adicione a trajetória do fóton por meio do comando  $\text{Se}(\langle \text{Condição} \rangle, \langle \text{Então} \rangle, \langle \text{Senão} \rangle)$ , com: 
$$\begin{cases} \langle \text{Condição} \rangle: x > 0, \\ \langle \text{Então} \rangle: f(x), \\ \langle \text{Senão} \rangle: h(x). \end{cases}$$
8. Adicione dois controles deslizantes,  $b$  e  $c$ , com  $b$  definido de 0 até 1, apenas no sentido crescente, e  $c = b + 0.04$ .
9. Acrescente dois pontos A e B, por meio do comando  $\text{Ponto}(\langle \text{Objeto} \rangle, \langle \text{Parâmetro} \rangle)$ . O Objeto, para os dois pontos será  $p$ , e o Parâmetro para o ponto A será  $b$ , enquanto  $c$  o será para o ponto B.
10. Crie um vetor, por meio do comando  $\text{Vetor}(\langle \text{Ponto Inicial} \rangle, \langle \text{Ponto Final} \rangle)$ , com A como ponto inicial e B como ponto final. Esse vetor ilustrará o fóton na simulação.
11. Adicione um ponto, que representará o elétron de recuo por meio do comando  $\text{Ponto}(\langle \text{Objeto} \rangle, \langle \text{Parâmetro} \rangle)$ , com: 
$$\begin{cases} \langle \text{Objeto} \rangle: \text{Se}(x > 0, g(x)), \\ \langle \text{Parâmetro} \rangle: c. \end{cases}$$
12. Calcule o deslocamento Compton por meio da equação  $\Delta\lambda = 2.2426 \cdot 10^{-12}(1 - \cos(\alpha))$ <sup>c</sup> e posteriormente arraste o comando da janela de álgebra para a janela de visualização.
13. Acione o controle deslizante  $b$  para verificar o funcionamento da simulação.

<sup>a</sup> **Atenção:** esses intervalos são definidos nas configurações dos controles deslizantes.

<sup>b</sup> Nesse passo, deve-se usar ; ao invés de apenas , para separar as coordenadas. Assim, o GeoGebra reconhecerá que se tratam de coordenadas polares com o primeiro componente sendo radial e o segundo o termo angular.

<sup>c</sup> Nesse comando, o  $\Delta$  e o  $\lambda$  podem ser escritos por meio do teclado virtual do GeoGebra.

## 3. Poço quadrado infinito

Em geral, a disciplina dedica boa parte do tempo à resolução da equação de Schrödinger com diferentes potenciais aplicados. Portanto, dedicaremos essa subseção à simulação da solução do potencial mais simples que é tratado no curso, que é o caso do potencial do poço quadrado infinito. Nele, o potencial aplicado tem o seguinte aspecto [13]:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x \leq a \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (10)$$

Portanto, a simulação leva em consideração a solução da equação Schrödinger unidimensional e independente do tempo, dada por:

$$-\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x). \quad (11)$$

Na equação 11,  $m$  é a massa da partícula,  $E$  é a energia e  $V(x)$  é o potencial ao qual a partícula está submetida, dado pela equação 10. A solução, para esse potencial específico, é dada por [13]:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad \text{com } n = \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (12)$$

Nessa solução,  $n$  é o número quântico principal e  $a$  é a largura do poço. Considerando a interpretação estatística de Max Born, a função que indicará a densidade de probabilidade de encontrar o elétron será  $|\psi|^2 = \psi^*\psi$ , ou seja:

$$|\psi_n(x)|^2 = \frac{2}{a} \text{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad \text{com } n = \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (13)$$

Devido à característica do potencial aplicado na partícula, ela fica inteiramente confinada ao interior do poço. Portanto, a simulação construída indica exatamente as regiões de pico no interior do poço, sendo essas, as regiões de maior probabilidade para encontrarmos a partícula confinada. A simulação pode ser visualizada na Figura 6. Nela, pode-se verificar qual é o comportamento da função ao alterar a largura  $a$  do poço e o estado  $n$  da partícula.

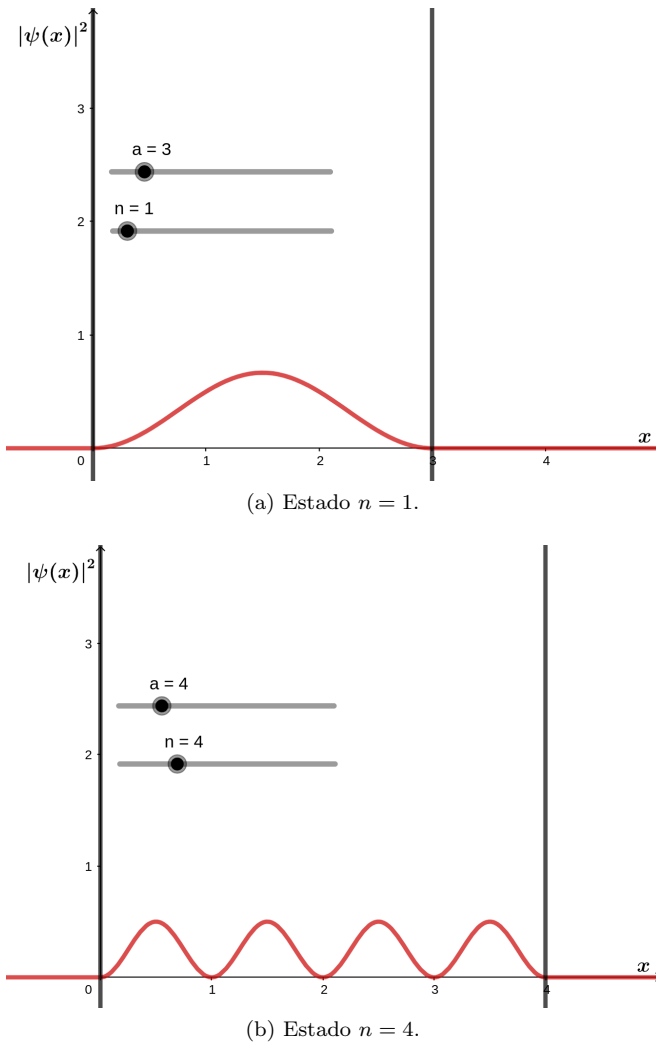


Figure 6: Densidade de probabilidade para o poço quadrado infinito com largura 3. Legenda: as áreas sobre os gráficos representam a probabilidade total de encontrar o elétron, enquanto os picos representam as regiões mais prováveis dele ser encontrado.

Se, por um lado, a descrição clássica de um sistema físico consiste encontrar equações de trajetória que descrevam toda a evolução temporal de um corpo sob ação de uma força, quando especificada a força, a descrição quântica, por outro lado, consiste em encontrar funções de densidade de probabilidade que especifiquem as regiões mais prováveis de uma partícula ser encontrada, quando ela está sujeita a algum potencial especificado. Desse modo, caso o *software* fosse utilizado para plotar a função de trajetória de um corpo sujeito a forças clássicas, a função vermelha representaria a trajetória da partícula, isto é, a sua posição exata em um determinado tempo. No entanto, nessa simulação, o *software* foi utilizado para plotar a solução quântica para o problema, de modo que o objeto de interesse são as regiões de pico apresentadas, pois estas, representam os locais mais prováveis da partícula, que está sujeita ao potencial dado pela equação 10, ser encontrada.

Com o intuito de enfatizar ainda mais a descrição prob-

abilística da MQ, em um contexto de ensino, a simulação apresentada pode motivar a introdução de outros assuntos relacionados, como o tunelamento quântico, fenômeno em que partículas possuem probabilidade de vencer barreiras de potenciais mesmo quando não possuem energia suficiente para isso. No poço quadrado infinito esse fenômeno não é possível, por se tratar de um potencial idealizado, cuja função de onda não é definida fora dele, entretanto, a simulação da Figura 6 pode ser utilizada para motivar a introdução desse fenômeno, enfatizando que em situações reais do mundo quântico, partículas poderiam ser encontradas fora das barreiras de potencial.

O passo-a-passo para a reconstrução da simulação apresentada na Figura 6 pode ser consultado no Box 3.

#### Box 3: construção da simulação 3.

1. Insira dois controles deslizantes  $a$  e  $n$ , que variem de 0 a 15 com incremento 1.
2. Insira as duas retas que delimitam as extremidades do poço, escrevendo, na janela de álgebra:  $x = 0$  e  $x = a$ .
3. Use o comando: `Se( <Condição>, <Então>, <Senão> )`,  
com: 
$$\begin{cases} \text{<Condição>: } 0 < x < a, \\ \text{<Então>: } \frac{2}{a} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \\ \text{<Senão>: } 0. \end{cases}$$
4. Acione os controles deslizantes  $a$  e  $n$  para verificar o comportamento da função.

#### 4. Átomo de hidrogênio

A próxima simulação apresentada é, em princípio, bastante semelhante à anterior, mas, leva em consideração a solução da equação de Schrödinger em três dimensões, ou seja, para o átomo de hidrogênio. O potencial ao qual o átomo de hidrogênio está, é o potencial Coulombiano, logo, em coordenadas esféricas:

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}. \quad (14)$$

Portanto, a simulação leva em consideração a solução da equação:

$$-\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 \psi + V(r)\psi = E\psi, \quad (15)$$

ou seja, a equação de Schrödinger tridimensional e independente do tempo, levando em consideração o potencial dado pela equação 14. Na equação 15,  $\nabla^2$  é o laplaciano. A solução geral é encontrada de forma analítica, depois de algumas manipulações algébricas, sendo ela [13]:

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta, \phi). \quad (16)$$



Nessa solução,  $n$ ,  $l$  e  $m$  são os números quânticos principal, azimutal e magnético, respectivamente, enquanto  $R_{nl}(r)$  é a solução radial e  $Y_l^m(\theta, \phi)$  faz parte da solução angular, chamada de harmônicos esféricos.  $R_{nl}(r)$  e  $Y_l^m(\theta, \phi)$  são polinômios que dependem dos números quânticos. Quando especificados, os polinômios podem ser calculados, ou consultados em tabelas específicas, como as apresentadas em [13]. Aqui, escolhemos o estado  $\psi_{321}$  para representarmos na simulação, de forma que:

$$\psi_{321}(r, \theta, \phi) = R_{32}(r)Y_2^1(\theta, \phi). \quad (17)$$

Levando-se em consideração o estado  $\psi_{321}$ , temos a seguinte função de onda:

$$\psi_{321} = -\frac{1}{81a^3\sqrt{a\pi}}r^2e^{-\frac{r}{3a}}\text{sen}(\theta)\cos(\theta)e^{i\phi}. \quad (18)$$

Para simplificação, toma-se  $k \equiv -1/81a^3\sqrt{a\pi}$ . Logo:

$$\psi_{321} = -kr^2e^{-\frac{r}{3a}}\text{sen}(\theta)\cos(\theta)e^{i\phi}. \quad (19)$$

Por carregar um termo imaginário, essa função de onda por si só não tem significado físico, sendo necessário tomar o módulo dela ao quadrado para que represente a amplitude de probabilidade de encontrar o elétron nesse estado, tal como fora realizado na simulação anterior, ou seja:

$$|\psi_{321}|^2 = k^2r^4e^{-\frac{2r}{3a}}\text{sen}^2(\theta)\cos^2(\theta). \quad (20)$$

Levando em consideração esse resultado, a simulação foi construída. Para simplificar a simulação, tomamos  $k = 1$ . Isso não altera a geometria da superfície da densidade de probabilidade, apenas a sua escala. A simulação pode ser visualizada na Figura 7. Nela, as regiões em azul, mais afastadas da origem do sistema, possuem maior probabilidade de encontrar o elétron, enquanto que as mais próximas possuem menor probabilidade. O passo-a-passo da sua construção pode ser consultado no Box 4.

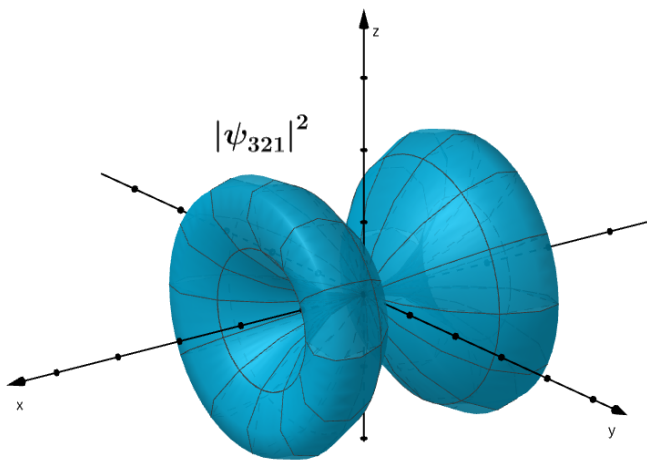


Figure 7: Superfície de densidade de probabilidade para o átomo de hidrogênio no estado  $\psi_{321}$ . Legenda: as regiões mais afastadas da origem representam os locais de maior probabilidade para encontrar o elétron.

Box 4: construção da simulação 4.

1. Abra a Janela de Visualização 3D.
2. Escreva, na janela de álgebra, dois controles deslizantes:  $\rho^a$  e  $a$ .
3. Escreva o seguinte comando na linguagem do GeoGebra<sup>b</sup>:

$$(\rho^4e^{-\frac{2\rho}{3a}}\text{sen}^2(\theta)\cos^2(\theta); \theta).$$

4. Utilize o comando de superfície de revolução, e clique primeiramente na curva gerada no item anterior e posteriormente no eixo  $x$ .
5. Altere os controles deslizantes e verifique as mudanças na dimensão do objeto criado.

<sup>a</sup> Nessa simulação, utiliza-se da letra grega  $\rho$  no lugar de  $r$ , pois assim, o *software* reconhece que se tratam de coordenadas polares.

<sup>b</sup> **Atenção:** para essa simulação, deve-se utilizar as letras gregas  $\theta$  e  $\rho$  por meio do teclado virtual do GeoGebra, além de ; no lugar de , para a separação das coordenadas, pois somente assim o *software* reconhecerá o comando e o tratará como coordenadas polares.

A simulação que pode ser construída seguindo os passos apresentados no Box 4 utiliza-se de uma superfície de revolução, e isso foi necessário pois, ao tomar  $|\psi|^2$ , um dos termos angulares foi suprimido. Dessa mesma forma, outras simulações podem ser construídas utilizando-se de novas soluções não normalizadas, tais como as apresentadas Figuras 8, 9 e 10. Nelas, foram utilizados os estados  $\psi_{310}$ ,  $\psi_{320}$  e  $\psi_{422}$ , respectivamente.

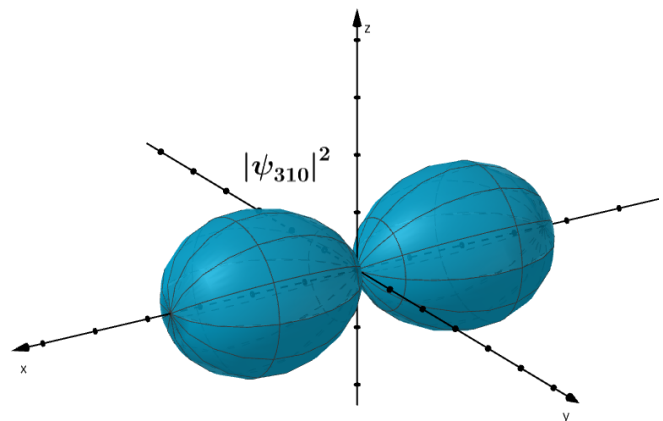


Figure 8: Superfície de densidade de probabilidade para o átomo de hidrogênio no estado  $\psi_{310}$ .

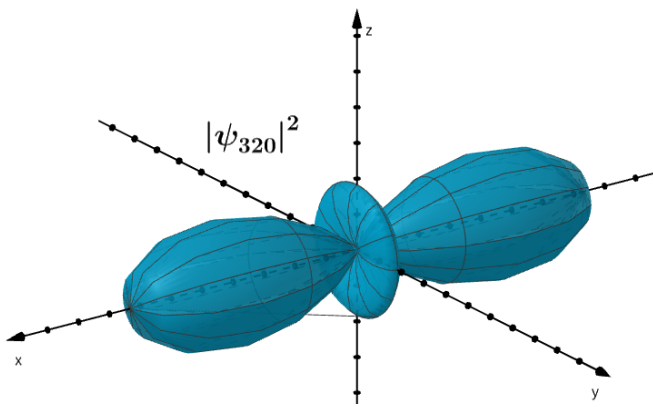


Figure 9: Superfície de densidade de probabilidade para o átomo de hidrogênio no estado  $\psi_{320}$ .

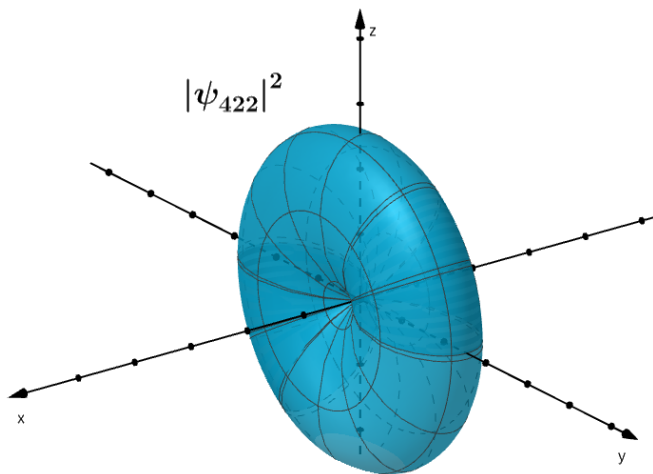


Figure 10: Superfície de densidade de probabilidade para o átomo de hidrogênio no estado  $\psi_{422}$ .

### 5. Aproximação em série de Taylor

A última simulação que apresentamos nesse trabalho, se trata de uma aproximação em segunda ordem via série de Taylor para um potencial arbitrário em um ponto de mínimo, que, na MQ, pode ser responsável por criar uma determinada barreira de potencial. Assim como na Mecânica Clássica, na MQ existem potenciais oscilatórios, como, por exemplo, o oscilador harmônico, que é comum em ambas as áreas. Nessas situações, realizam-se aproximações em séries de Taylor em torno de um ponto de equilíbrio estável. Desse modo, essa simulação busca demonstrar como essa análise pode ser feita por meio do *software* GeoGebra. O resultado da simulação pode ser visualizado na Figura 11. Nela, a curva vermelha representa o potencial  $V(x)$  arbitrário, enquanto a linha tracejada representa a aproximação da série de Taylor.

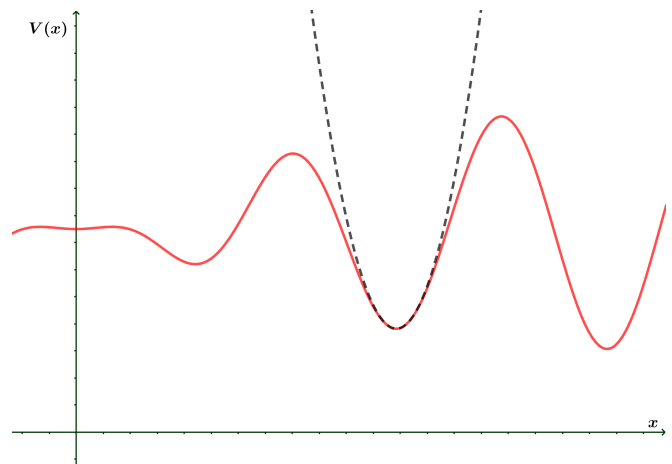


Figure 11: Série de Taylor em segunda ordem para um potencial arbitrário. Legenda: a curva vermelha representa um potencial arbitrário, enquanto a curva tracejada foi a função obtida por meio da aproximação em segunda ordem via série de Taylor no ponto de mínimo local escolhido.

Para a construção dessa simulação, elaborou-se o gráfico da função desejada por meio da janela de álgebra do programa. Utilizou-se como função potencial arbitrária, uma função oscilante que contém uma região que pode se tornar uma barreira de potencial. A função escolhida foi:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2} \cos(4x) + \frac{3}{2}. \quad (21)$$

Posteriormente, analisamos alguns pontos especiais dela, por meio do recurso “pontos especiais” presente na própria janela de álgebra do *software* ao clicar na função. Esse recurso gera alguns pontos na própria função que podem ser analisados individualmente. Desse modo, foi escolhido o quarto ponto especial da função a partir de  $x = 0$ , no sentido crescente do eixo  $x$ , para fazer a aproximação em série de Taylor. Esse ponto foi escolhido por se tratar de um ponto de mínimo de equilíbrio estável.

O passo-a-passo da construção da simulação pode ser visualizado no Box 5, que resume tudo o que foi descrito anteriormente de maneira mais sucinta.

#### Box 5: construção da simulação 5.

1. Escreva, na janela de álgebra, a função:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2} \cos(4x) + \frac{3}{2}.$$

2. Ache os pontos especiais da função e escolha um deles.

3. Use o comando:

PolinômioDeTaylor( <Função> , <Centro> , <Ordem> ),

com:  $\begin{cases} \text{<Função>: } f; \\ \text{<Centro>: } \text{valor de } x \text{ do ponto; e} \\ \text{<Ordem>: } 2 \end{cases}$

#### IV. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse estudo foi construído com base em discussões ao longo das disciplinas correlatas da Licenciatura em Física do IFTO, campus Palmas. Os conteúdos incluídos foram selecionados pelo simples critério de mostrar o máximo de funcionalidades do software, mesmo que essas sejam grandes demais para as poucas páginas apresentadas aqui. De fato, há muito mais o que ser explorado ainda. E isso pode ser feito na Física Quântica, mas também em diversas outras áreas da Física. Seja com foco no ensino superior, seja para desenvolver material didático para o ensino médio. Ao finalizar esse trabalho, após quase um ano debruçados sobre o software tentando obter o máximo de ferramentas que poderiam ser utilizadas, não nos resta dúvida sobre o seu potencial educacional.

Faz-se oportuno destacar ainda que, TIC's como a apresentada aqui, trazem os fenômenos do mundo quântico para mais próximos de nós. Utilizando números, gráficos, animações, simulações e outras formas de visualização do conteúdo, conseguimos deixar o debate sobre o assunto mais palpável e, com isso, colaboramos pedagogicamente

com a formação de estudantes e professores, desempenhando ainda o nosso papel no letramento científico, a fim de evitar a utilização de palavras e conceitos equivocados com intuito de efetuar práticas indevidas que descontextualizam a Física Quântica para obter benefícios usando pseudociências.

O uso de simulações que permitam ao estudante inserir equações matemáticas e dados numéricos, e ainda manipulá-los dentro do ambiente computacional, desenvolve características muito semelhantes às do âmbito do laboratório, onde o aluno está a testar diferentes métodos em busca da realização de um experimento. É claro que uma metodologia não substitui a outra, mas ambas se complementam, além de tornar mais acessível a realização de experimentos que, na dependência exclusiva de um laboratório, não seriam de fácil acesso.

#### AGRADECIMENTOS

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins - IFTO, *Campus* Palmas, pelo apoio financeiro à pesquisa.

- 
- [1] Papert, S. (1987). "Information technology and education: Computer criticism vs. technocentric thinking." *Educational researcher*, 16(1), 22-30.
- [2] Veloso, R. D. S. (2017). *Tecnologias da Informação e da Comunicação*. Saraiva Educação SA.
- [3] Betz, Michel Emile Marcel, and Rejane Maria Ribeiro-Teixeira. "Material instrucional apresentando conteúdos de métodos computacionais para o ensino de física." *Caderno brasileiro de ensino de física*. Florianópolis. Vol. 29, nesp 2 (out. 2012), p. 787-811 (2012).
- [4] Pires, M. A., e Veit, E. A. (2006). "Tecnologias de Informação e Comunicação para ampliar e motivar o aprendizado de Física no Ensino Médio." *Revista Brasileira de ensino de Física*, 28, 241-248.
- [5] Chhabra, Mahima, and Ritwick Das. "Quantum mechanical wavefunction: visualization at undergraduate level." *European Journal of Physics* 38.1 (2016): 015404.
- [6] Souza, Rafaelle Da Silva, and Styves Barros Miranda. "Investigações sobre as possibilidades de reconhecer apropriações indevidas da Mecânica Quântica: o papel da divulgação científica." *Revista Brasileira de Ensino de Física* 44 (2022).
- [7] de Oliveira Araujo, Liana, Edvan Moreira, and Fernando MO Moucherek. "Popularizando a Física Quântica conceitual e suas aplicações através das redes sociais durante a Pandemia de COVID-19". *Revista Práticas em Extensão* 6.1 (2022):1-12.
- [8] Ostermann, Fernanda, Sandra Denise Prado, and Trieste dos Santos Freire Ricci. "Desenvolvimento de um software para o ensino de fundamentos de Mecânica Quântica." *Física na escola*. São Paulo. Vol. 7, n. 1 (maio 2006), p. 22-25 (2006).
- [9] Netto, Jader da Silva, Fernanda Ostermann, and Claudio Jose de Holanda Cavalcanti. "Simulação computacional no Interferômetro Virtual de Mach-Zehnder: uma proposta de Ensino de Mecânica Quântica sob a perspectiva sociocultural" (2017).
- [10] Fernandes, Rúbia de Fátima Antunes Martins, et al. "Pinturas de Salvador Dalí para introduzir conceitos de Mecânica Quântica no Ensino Médio." *Caderno Brasileiro de Ensino de Física* 34.2 (2017): 509-529.
- [11] dos Santos Feitosa, Samuel, et al. "Uma sequência didática utilizando a literatura de cordel e a arte das histórias em quadrinhos para inserção de tópicos de Mecânica Quântica no Ensino Médio." *Caderno Brasileiro de Ensino de Física* 37.2 (2020): 662-694.
- [12] R. Eisberg, R. Resnick, *Mecânica Quântica: átomos, moléculas, sólidos, núcleos e partículas* (Editora Campus, 1979), 1ª ed.
- [13] D. J. Griffiths, *Mecânica Quântica* (Editora Pearson, São Paulo, 2011), 2ª ed.
- [14] I. M. Greca, M. A. Moreira, V. E. Herscovitz, "Uma proposta para o ensino de Mecânica Quântica." *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 23, 444-457, 2001.
- [15] H. M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica 4: ótica, relatividade, Mecânica Quântica* (Editora Blucher, São Paulo, 2014), 4ª ed.