



UTILIZANDO UM TRAPÉZIO ISÓCELES PARA O CÁLCULO DA EXCENTRICIDADE DE ORBITAS PLANETÁRIAS

*

Este trabalho quantitativo consistiu em desenvolver uma forma aproximada de calcular a excentricidade das órbitas dos planetas usando um trapézio isósceles. Os dados utilizados para verificar a validade do método do trapézio foram a distância do afélio (R_a), distância do periélio (R_p) e a excentricidade (e) já estabelecidos na literatura dos seguintes corpos celestes: Mercúrio; Vênus; Terra; Marte; Júpiter; Saturno; Urano; Netuno e o cometa Halley. Conclui-se que o método desenvolvido neste trabalho possui boa precisão em comparar as excentricidades aqui calculadas com as já existentes. Além disso, durante a aplicação do método, é possível observar, no trapézio isósceles, a existência de duas angulações que foram aqui definidas como angulação no afélio (θ) e angulação no periélio (φ), e essas angulações podem ajudar os estudantes a estabelecerem uma relação mais direta entre a 1ª e a 2ª lei de Kepler. Não apenas isso, mas também no método do trapézio, o professor do ensino básico (seja de matemática ou física) pode explorar a utilização de diversos conceitos ligados a geometria, como a diagonal de quadrados; teorema de Pitágoras; soma dos ângulos internos de um trapézio isósceles e entre outros, podendo enriquecer suas aulas.

I. INTRODUÇÃO

Desde a antiguidade até hoje, o céu é uma rica fonte de curiosidade humana. E o movimento do Sol e dos planetas do sistema solar influenciou não apenas o interesse, mas também a cultura, a religião e até as relações de poder em diferentes sociedades, como no caso dos Maias e dos Guaranis (RODRIGUES *et al.*, 2022).

De forma registrada, os estudos ocidentais sobre os astros presentes no firmamento começaram na Grécia graças a Eudoxo de Cnido, Cláudio Ptolomeu e entre outros pensadores gregos (NOGUEIRA e CANALLE, 2009).

Apesar de existir uma quantidade muito grande de registros históricos de povos ocidentais acerca de estudos sobre os astros siderais, também é válido mencionar que a astronomia também se desenvolveu em sociedades do oriente, como na região chinesa (HAUDRICOURT e NEEDHAM, 1959; HORVATH, 2008; MARTINS, BUFFON e NEVES, 2019).

Os registros históricos que sobreviveram ao tempo e aos conflitos (como a época dos estados combatentes) dessa região relatam sobre a ocorrência de eclipses solares e lunares, além das observações de cometas e desenvolvimento de um calendário similar (em alguns aspectos) ao que é atualmente usado (HAUDRICOURT e NEEDHAM, 1959; HORVATH, 2008; MARTINS, BUFFON e NEVES, 2019).

Hoje, esse conhecimento gerado em mais de 2000 anos de história escrita sobre os corpos celestes ajuda a desenvolver tecnologias que tornam a vida cotidiana mais fácil e rápida, como satélites artificiais para o funcionamento do GPS e Wi-Fi (MCDOWELL, 2020).

A importância desses estudos vai além de entender a mecânica do planeta Terra. Por exemplo, eles são usados para entender vários aspectos ao redor de Marte e Júpiter ou estrelas e exoplanetas presentes em outras galáxias.

Um dos conhecimentos gerados desses estudos é a excentricidade das órbitas planetárias. A excentricidade determina o quão “achatado” é esse movimento orbital elíptico (CANALLE, 2003; DE ALMEIDA, 2013). A excentricidade (e) é uma grandeza adimensional que varia no seguinte intervalo:

$$0 \leq e \leq 1$$

De acordo com Canalle (2003) e De Almeida (2013), quando $e \rightarrow 0$, a órbita planetária possui um formato muito próximo de ser circular, um exemplo disso é a trajetória orbital de Vênus ($e = 0,0068$). Porém, quando $e \rightarrow 1$, a trajetória se aproxima de uma reta (Figura 1), sendo um exemplo disso a órbita do cometa Halley ($e = 0,967$).

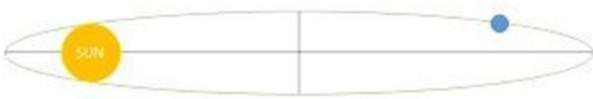


Figura 1. Ilustração da órbita do cometa Halley.
(AUTOR, 2023)

Apesar de ser uma grandeza adimensional, a excentricidade possui influência física. Por exemplo, devido ao planeta Terra possuir uma excentricidade baixa ($e = 0,0167$), ele não sofre uma variação de temperatura gigantesca durante o periélio, fato esse que colabora com a existência da vida no planeta azul (CANALLE, 2003).

Outro exemplo da influência física da excentricidade pode ser visto nas missões espaciais para a observação de Vênus. Tais missões espaciais precisam ter como um dos objetivos principais localizar, usando a excentricidade da órbita heliocêntrica de Vênus, regiões onde a órbita está “congelada” para reduzir o número de incidentes que os satélites artificiais podem ter durante o período de realização da pesquisa astronômica (ARNALDO FILHO, DOMINGO e SANCHES, 2021).

Visto a importância e relevância prática dessa grandeza adimensional, neste trabalho é proposta outra forma matemática de medir a excentricidade usando um trapézio isósceles.

A justificativa para produzir tal artigo é que o método aqui apresentado pode apresentar novas formas de compreensão e perspectivas sobre as famosas leis de Kepler, enriquecendo o conhecimento existente da cinemática planetária.

Primeiramente, será apresentado um pouco da história que levou à formulação da primeira lei de Kepler. A seguir, será explicada como se pode obter a excentricidade das órbitas planetárias através de análise geométrica (a forma mais simples e mais famosa). Por fim, será demonstrado como podemos utilizar um trapézio isósceles para um cálculo aproximado dessa grandeza matemática adimensional e algumas considerações acerca do uso do método do trapézio na análise do movimento de planetas.

II. SOBRE A HISTÓRIA DA PRIMEIRA LEI DE KEPLER.

Uma das linhas de pesquisa mais significativas nos séculos 15 à 17 foi o estudo do movimento dos corpos celestes. Claro, vários cientistas renomados aceitaram o desafio de entender a mecânica dos planetas e estrelas

de forma mais profunda, incluindo Nicolau Copérnico, Galileu Galilei e outros.

Mas, apesar de ser um tema de pesquisa fascinante, o trabalho desses cientistas se chocava com as concepções da religião católica. Esse embate teve como ponto central a teoria geocêntrica, defendida pela Igreja Católica, e a teoria heliocêntrica, apoiada por Nicolau Copérnico, Galileu Galilei e defensores como Giordano Bruno (LOPES, 2014).

A teoria geocêntrica diz que o Sol, os outros planetas e tudo o mais que existia se moviam ao redor da Terra porque o planeta azul era a criação perfeita de Deus (LOPES, 2014).

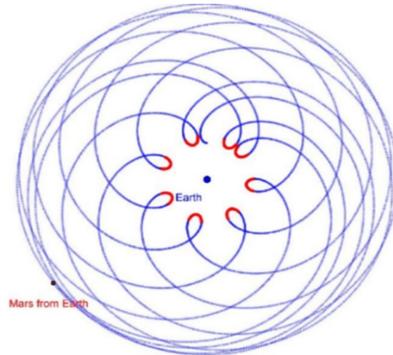


Figura 2. Ilustração da órbita geocêntrica de Marte.
(DIOLATIS e PAVLOGEORGATOS, 2019)

Porém, devido à não regularidade das órbitas geocêntricas (como pode ser visto na Figura 2), Nicolau Copérnico decidiu observar o movimento planetário usando o Sol como centro do sistema de corpos celestes, verificando que as órbitas planetárias heliocêntricas compartilhavam a mesma forma e eram regulares, como podemos ver na Figura 3 (LOPES, 2014).

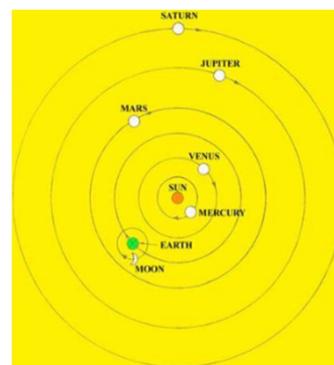


Figura 3. Ilustração das órbitas heliocêntricas.
(LIRITZIS e COUCOUZELI, 2008)

No entanto, para Nicolau Copérnico, o Sol era o centro do universo, além das órbitas heliocêntricas terem uma forma circular (GINGERICH, 2008).

Galileu Galilei concordava que as órbitas heliocêntricas eram mais regulares, mas apesar de ser um cientista renomado na época, foi julgado e condenado pela Igreja

Católica; como punição, ele teria que negar publicamente que a teoria heliocêntrica tivesse qualquer validade ou mérito até o fim de sua vida (GINGERICH, 2008; ROSEN, 1965).

Longe dos embates científico-religiosos que aconteciam com tanta intensidade na região italiana, Tycho Brahe e Johannes Kepler também se empenharam em observar o movimento das estrelas e planetas no céu, obtendo assim uma enorme quantidade de dados astronômicos (SILVA, 2016).

Usando esses dados, Johannes Kepler (ao contrário de Brahe, apoiou o heliocentrismo) desenvolveu três leis que explicam a dinâmica celeste. A primeira lei de Kepler confronta uma das concepções da teoria heliocêntrica de Nicolau Copérnico. As geometrias das órbitas planetárias não eram circulares; eram elipses (SILVA, 2016).

III. PRIMEIRA LEI DE KEPLER E A EXCENTRICIDADE

A primeira lei de Kepler diz que as órbitas heliocêntricas são elípticas, cujo 1 dos focos desta elipse é o Sol. Podemos ver na Figura 4 o movimento orbital elíptico da Terra (ROSEN, 1965).

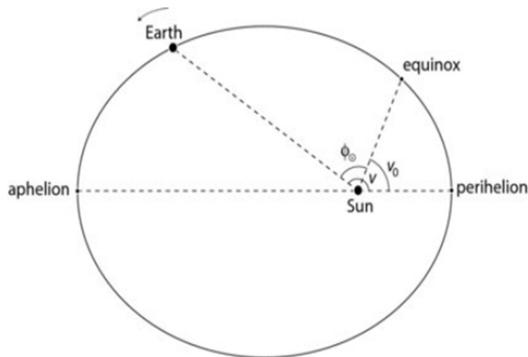


Figura 4. Ilustração da órbita elíptica da Terra. (JENKINS, 2013)

Devido às órbitas elípticas dos planetas, a dinâmica do movimento translacional também é influenciada por uma grandeza adimensional conhecida como excentricidade (DE ALMEIDA, 2013; CANALLE, 2003; ARNALDO FILHO, DOMINGO e SANCHES, 2021).

A excentricidade de uma elipse mede o quão diferente é essa figura geométrica de um círculo.

Como uma elipse é um “círculo achatado” que possui 2 focos (F1 e F2), para calcular a excentricidade, precisamos medir quanto vale esse achatamento (CANALLE,2003; DE ALMEIDA,2013).

Para isso, vamos observar a Figura 5:

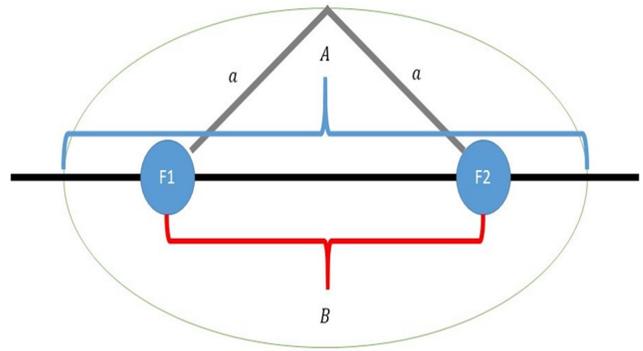


Figura 5. Ilustração de uma Elipse. (AUTOR, 2023)

Onde:

$$\begin{aligned} A &= \text{Comprimento do eixo maior da elipse (m)} \\ B &= \text{Distância entre o foco F1 e o foco F2 (m)} \end{aligned}$$

Quando $B = 0$, a é igual a $\frac{A}{2}$, e a elipse se torna um círculo, e quando $B = A$, a fica nulo e a elipse se torna uma reta. Ou seja, A e B são medidas essenciais para a mensuração da excentricidade através da equação (1):

$$e = \frac{B}{A} \quad (1)$$

Considerando a 1ª lei de Kepler (O Sol é um dos focos da órbita planetária elíptica), temos que o comprimento A pode ser calculado usando a equação (2):

$$A = R_a + R_p \quad (2)$$

Onde:

$$\begin{aligned} R_a &= \text{Distância do Afélio (m)} \\ R_p &= \text{Distância do Periélio (m)} \end{aligned}$$

Agora, se pegarmos a distância do afélio (em roxo) e subtraímos dela a distância do periélio (em verde), temos a distância B (equação (3)), como podemos ver na Figura 6:

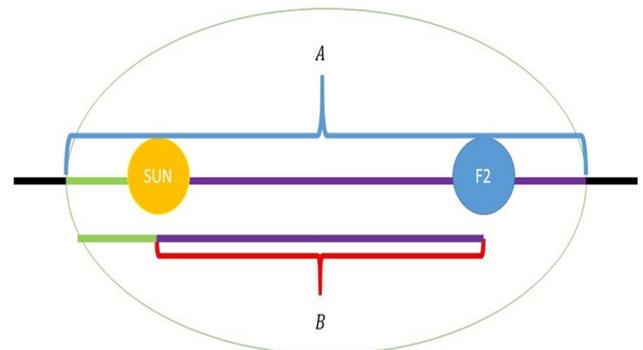


Figura 6. Ilustração geométrica da equação (3). (AUTOR, 2023)

$$B = R_a - R_p \quad (3)$$

Aplicando (2) e (3) na equação (1), finalmente chegamos na famosa equação (4):

$$e = \frac{R_a - R_p}{R_a + R_p} \quad (4)$$

A excentricidade de cada órbita planetária no sistema solar calculada usando a equação (4) é mostrada na Tabela 1 (BAKULEV, 2006).

Planeta	R_a	R_p	e
Mercúrio	$69,82 \cdot 10^9 \text{ metros}$	$46 \cdot 10^9 \text{ metros}$	0,2056
Vênus	$108,94 \cdot 10^9 \text{ metros}$	$107,48 \cdot 10^9 \text{ metros}$	0,0068
Terra	$152,1 \cdot 10^9 \text{ metros}$	$147,09 \cdot 10^9 \text{ metros}$	0,0167
Marte	$249,23 \cdot 10^9 \text{ metros}$	$206,62 \cdot 10^9 \text{ metros}$	0,0934
Júpiter	$816,62 \cdot 10^9 \text{ metros}$	$740,52 \cdot 10^9 \text{ metros}$	0,0483
Saturno	$1514,5 \cdot 10^9 \text{ metros}$	$1352,55 \cdot 10^9 \text{ metros}$	0,0560
Urano	$3003,62 \cdot 10^9 \text{ metros}$	$2741,3 \cdot 10^9 \text{ metros}$	0,0461
Netuno	$4545,67 \cdot 10^9 \text{ metros}$	$4444,45 \cdot 10^9 \text{ metros}$	0,0113

Tabela 1. Excentricidade de todos os planetas do sistema solar. (AUTOR,2023)

IV. O MÉTODO DO TRAPÉZIO

Para calcular uma excentricidade aproximada da órbita de um planeta usando um trapézio isósceles, vemos primeiro a Figura 7:



Figura 7. Representação do periélio e afélio de um planeta. (AUTOR, 2023)

Usando a Figura 7, vamos criar dois quadrados (verde e roxo). Os lados do quadrado verde são iguais em comprimento à distância do periélio, e os lados do quadrado roxo são iguais em tamanho à distância do afélio. Podemos ver esses dois quadrados e as hipotenusas (obtidas pelo teorema de Pitágoras) em vermelho na Figura 8:

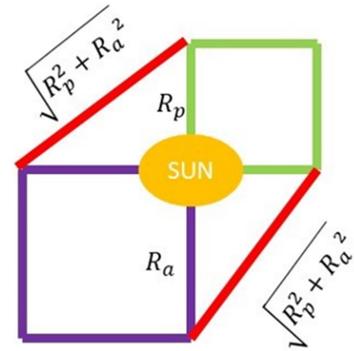


Figura 8. Representação dos quadrados e hipotenusas (AUTOR, 2023)

Com as diagonais dos quadrados verde e roxo (lado do quadrado multiplicado por $\sqrt{2}$), podemos obter o trapézio isósceles da Figura 9:

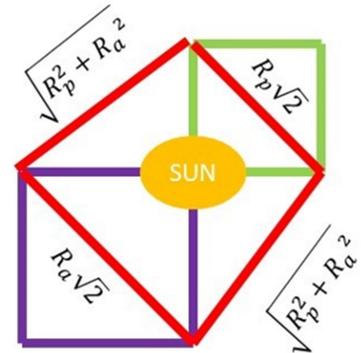


Figura 9. Representação do trapézio isósceles. (AUTOR, 2023)

Usando o trapézio isósceles da Figura 9, podemos obter o triângulo retângulo da Figura 10:

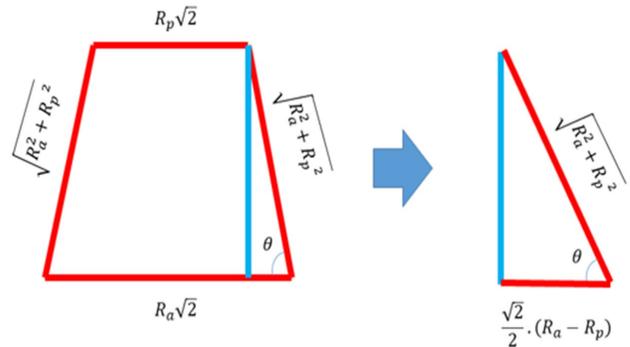


Figura 10. Representação do triângulo retângulo. (AUTOR, 2023)

Então, finalmente temos uma forma aproximada de calcular a excentricidade das órbitas planetárias usando o cosseno do ângulo θ do triângulo retângulo da Figura 10.

$$e \approx \text{Cos}(\theta) = \frac{\sqrt{2} \cdot (R_a - R_p)}{2 \cdot \sqrt{R_a^2 + R_p^2}} \quad (5)$$

Vamos comparar os resultados da equação (4) com os resultados da equação (5) na Tabela 2:

Planeta	Equação (4)	Equação (5)	(4) - (5)
Mercúrio	0,2056	0,2023	0,0033
Vênus	0,0068	0,0068	0,0000
Terra	0,0167	0,0168	0,0001
Marte	0,0934	0,0934	0,0000
Júpiter	0,0483	0,0490	0,0007
Saturno	0,0560	0,0566	0,0006
Urano	0,0461	0,0458	0,0003
Netuno	0,0113	0,0113	0,0000

Tabela 2. Comparação entre as equações (4) e (5). (AUTOR,2023)

Utilizando os dados da Tabela 2, verificamos (através do modulo da diferença entre as excentricidades) que existe uma aproximação precisa entre as equações (4) e (5). Ou seja, além da demonstração vista no tópico III, o método do trapézio desenvolvido aqui também é válido (considerando até duas casas decimais) para o cálculo da excentricidade.

V. OUTRAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O MÉTODO DO TRAPÉZIO

A equação (5) calcula de forma aproximada a excentricidade das orbitas planetárias, porém, precisamos definir fisicamente o que é o ângulo θ , para isso, vamos observar a Figura 11:

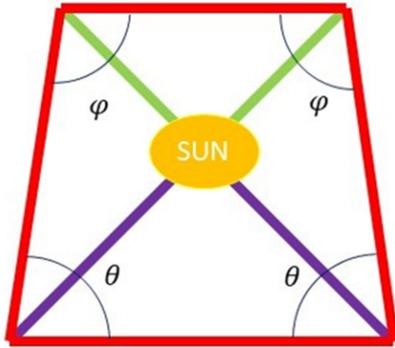


Figura 11. Representação geométrica do ângulo θ e do ângulo φ . (AUTOR, 2023)

Observando a Figura 11, e considerando que a linha roxa é a distância do afélio e a linha verde é a distância do periélio, podemos definir o seguinte:

$$\begin{aligned} \theta &= \text{Angulação da orbita no afélio} \\ \varphi &= \text{Angulação da orbita no periélio} \end{aligned}$$

Através da equação (6) podemos obter as angulações no afélio dos planetas.

$$\theta = \text{Arccos} \frac{\sqrt{2} \cdot (R_a - R_p)}{2 \cdot \sqrt{R_a^2 + R_p^2}} \quad (6)$$

E, considerando que a soma dos ângulos internos de um trapézio isósceles é igual a 360° , podemos também calcular a angulação no periélio dos planetas do sistema solar através da equação (7):

$$\varphi = \frac{360^\circ - 2 \cdot \theta}{2} \quad (7)$$

As angulações no afélio e no periélio de cada planeta do sistema solar obtidas pelas equações (6) e (7) podem ser vistas na Tabela 3:

Planeta	θ	φ
Mercúrio	78,33°	101,67°
Vênus	89,61°	90,39°
Terra	89,04°	90,96°
Marte	84,64°	95,36°
Júpiter	87,23°	92,77°
Saturno	86,79°	93,21°
Urano	87,36°	92,64°
Netuno	89,35°	90,65°

Tabela 3. Angulações dos planetas do sistema solar no afélio e periélio. (AUTOR,2023)

A Tabela 3 deixa claro que $\varphi > \theta$. Considerando essa desigualdade, podemos afirmar que a velocidade angular no periélio (v_φ) é maior que a velocidade angular no afélio (v_θ).

$$\varphi > \theta$$

$$\frac{d(\varphi)}{dt} > \frac{d(\theta)}{dt}$$

$$v_\varphi > v_\theta$$

Se a velocidade angular no periélio é maior que a velocidade angular no afélio. Então a velocidade orbital no periélio é maior que a velocidade orbital no afélio.

Sabendo que a velocidade orbital no periélio é maior que a velocidade orbital no afélio, então se pode afirmar que os planetas realizam um deslocamento maior no periélio do que no afélio. E tal afirmação é uma das consequências da 2ª lei de Kepler.

A desigualdade explicitada pelos dados da Tabela 3 se torna menor quando $e \rightarrow 0$, como podemos observar nas angulações do afélio e periélio de Vênus, Terra e Netuno.

Ou seja, quando $e \rightarrow 0$, assim como a trajetória orbital elíptica tende a se tornar circular (CANALLE,2003; DE ALMEIDA,2013), o tal trapézio isósceles tende a se tornar um quadrado ($\varphi \approx \theta$), podemos representar isso na Figura 12:

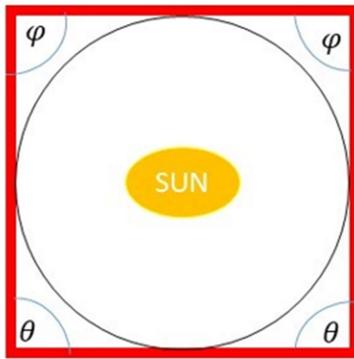


Figura 12. Representação geométrica de $\varphi \approx \theta$.
(AUTOR, 2023)

A título de curiosidade, o cometa Halley possui $\theta = 14,76^\circ$ e $\varphi = 165,24^\circ$, portanto, quando $e \rightarrow 1$, assim como a trajetória elíptica tende a se tornar uma reta (CANALLE, 2003; DE ALMEIDA, 2013), o trapézio isósceles também tende a ser uma reta, como podemos ilustrar na Figura 13:

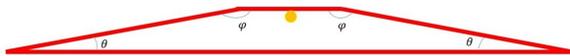


Figura 13. Representação geométrica de $\varphi \gg \theta$.
(AUTOR, 2023)

VI. CONCLUSÃO

Apesar do método apresentado no tópico III ser de fácil compressão, o método do trapézio aqui apresentado possui, como uma de suas vantagens, aprofundar no entendimento conjunto da primeira lei de Kepler e da segunda lei de Kepler.

Além disso, o método do trapézio também pode permitir que professores de matemática trabalhem com seus alunos (de forma interdisciplinar com a física) propriedades geométricas de outras formas além da elipse, como as propriedades geométricas dos quadrados (abordando a questão da diagonal de um quadrado); trapézios isósceles (a questão da soma dos ângulos internos de um trapézio) e triângulos retângulos (função cosseno, arco cosseno e teorema de Pitágoras).

Em relação as vantagens de cálculo, o método do trapézio, diferente do método apresentado no tópico III, permite que o estudante possa observar a angulação no movimento dos planetas durante o período do afélio e do periélio.

VII. REFERÊNCIAS

ARNALDO FILHO, P.; DOMINGOS, R.; SANCHEZ, D. Estabilidade de órbitas ao redor de Vênus. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 8, n. 1, 2021.

BAKULEV, V. The Titius-Bode law of planetary distances: new approach. *arXiv preprint astro-ph/0601369*, 2006.

CANALLE, J. O problema do ensino da órbita da Terra. *Física na Escola*, v. 4, n. 2, p. 12-16, 2003.

DE ALMEIDA, G. Um método simples e intuitivo para determinar a excentricidade da órbita da Terra. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 30, n. 1, p. 165-176, 2013.

DIOLATZIS, I e PAVLOGEORGATOS, G. Simulating Kepler's geocentric Mars orbit. *New Astronomy*, v. 71, p. 39-51, 2019.

GINGERICH, O. O livro que ninguém leu: em busca das revoluções de Nicolau Copérnico. Rio de Janeiro: Record, 2008.

HAUDRICOURT, A e NEEDHAM, J. A Ciência Chinesa Antiga. In FURON et al. (org). *A Ciência Antiga e Medieval: As ciências antigas do oriente*. São Paulo: Difusão Europeia do Livro, 1959.

JENKINS, A. The Sun's position in the sky. *European Journal of Physics*, v. 34, n. 3, p. 633, 2013.

LIRITZIS, I e COUCOUZELI, A. Ancient Greek heliocentric views hidden from prevailing beliefs?. *Journal of Astronomical History and Heritage*, v. 11, p. 39-49, 2008.

LOPES, I. Giordano Bruno: entre o geocentrismo e o heliocentrismo. *Griot: Revista de Filosofia*, v. 9, n. 1, p. 1-25, 2014.

MARTINS, M.; BUFFON, A.; NEVES, M. A ASTRONOMIA NA ANTIGUIDADE: UM OLHAR SOBRE AS CONTRIBUIÇÕES CHINESAS, MESOPOTÂMICAS, EGÍPCIAS E GREGAS. *Revista Valore*, v. 4, n. 1, p. 810-823, 2019.

MCDOWELL, J. The low earth orbit satellite population and impacts of the SpaceX Starlink constellation. *The Astrophysical Journal Letters*, v. 892, n. 2, 2020.

NOGUEIRA, S. e CANALLE, J. *Astronomia: Ensino Fundamental e Médio*. Coleção explorando o ensino. Brasília: MEC, SEB, MCT, AEB, v.11, p.25-46, 2009.

RODRIGUES, I et al. *Culturas estelares com planetário: viagens pela astronomia de povos originários*. *Revista Docência e Ciberultura*, v. 6, n. 4, p. 291-294, 2022.

ROSEN, E. Copernicus on the phases and the light of the planets. *Organon*, v. 2, p. 61-78, 1965.

SILVA, G. Leis de Kepler do movimento planetário: um breve panorama de como a história da cosmologia mostra sua descoberta. *15º SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA CIÊNCIA E DA TECNOLOGIA*, 2016.