



## O Modelo Padrão e duas possíveis rotas de extensão.

H. Belich\* and E.V.B. Leite†

*Departamento de Física e Química, Universidade Federal do Espírito Santo,  
Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras, 29060-900, Vitória, ES, Brazil.*

Simetrias e leis de conservação, e violação dessas simetrias são excelentes guias na formulação de modelos físicos em diversas escalas de energia. A violação de simetrias por transição de fase (violação espontânea de simetria) consegue descrever sistemas que vão desde a Matéria Condensada até a Física de Altas Energias. Nestas notas iremos apresentar um desenvolvimento conceitual de simetrias e suas violações usando inicialmente como exemplo a simetria global de rotação e sua violação espontânea de simetria global, por um fluido escalar gerando o ferromagnetismo. Usando como exemplo de transição a supercondutividade faremos um esboço do Mecanismo de Anderson-Higgs. Este mesmo mecanismo é utilizado para unificar o Eletromagnetismo e a interação Fraca no Modelo Padrão de Weinberg-Salam-Glashow. Finalizamos as notas apresentando duas propostas de extensão desse modelo: a Violação de Simetria de Lorentz dadas de duas maneiras: violação espontânea, e violação explícita por Teorias Não-Comutativas.

### I. INTRODUÇÃO

A simetria consagrada pelo estabelecimento da relatividade restrita de Einstein, a simetria de Lorentz (preserva a velocidade da luz como limite superior dos objetos que se movem) deve ser violada à medida que nos aproximamos da escala de energia de Planck ( $10^{19} GeV$ ). Este ponto de vista torna-se cada vez mais hegemônico quando tentamos compatibilizar a Mecânica Quântica e a Relatividade Geral. Para estabelecer ao estudante uma rota que situe o panorama em que a pesquisa em Violação da Simetria de Lorentz se estabelece. Em nosso ponto de vista, devemos acompanhar os trabalhos iniciais de Dirac. Em seguida, para se estabelecer a construção do Modelo Padrão (MP) vamos seguir os trabalhos de um aluno do grupo de Dirac, Abdus Salam [1], deste modo podemos entender os princípios de simetrias (e violações dessas simetrias) que nortearam estabelecimento do MP.

Em sua tese, concluída em 1926, Dirac desenvolveu uma versão da Mecânica Quântica incorporando a Mecânica Matricial de Werner Heisenberg com a Mecânica Ondulatória de Erwin Schrödinger num único formalismo matemático [2]. No período de 1927 a 1931, Dirac inicia uma série de estudos, que estão interligados, e que vão da quantização do campo eletromagnético, à formulação de uma equação relativística para o spin do elétron, o acoplamento do elétron ao campo eletromagnético e considerações sobre uma possível estrutura do elétron, o que influenciou toda a física do século XX.

Até Dirac, toda a contribuição relativística do elétron em uma descrição quântica, como na descrição das raias espectrais do átomo de hidrogênio, eram realizadas como contribuições perturbativas ao tratamento não-relativístico. Mas Dirac acreditava que a Relatividade Restrita, por ser um fundamento, devesse estar presente em uma formulação a priori, e não entrar como correções de uma teoria. Deveríamos partir da simetria relativística do espaço-tempo na própria formulação da mecânica quântica.

Dirac foi o primeiro a formular a quantização do campo eletromagnético, e realizar o acoplamento do campo eletromagnético ao elétron. Deste modo, ele propõe a simetria de calibre, no caso do acoplamento com o elétron o grupo de simetria de calibre é o  $U(1)$ , e são lançadas as bases para uma nova física. Sua teoria trazia alguns resultados embaraçosos que depois passaram a ser o seu sucesso. A descoberta da existência de anti-partículas, previstas pela equação quântico relativista de Dirac, foi um dos grandes feitos de sua teoria. A previsão do pósitron e a sua confirmação experimental em 1932, foi uma das maiores descobertas de toda a história da física. Além disso, justifica-se o fator giromagnético do elétron e, ainda no contexto do spin, sua formulação permite a compreensão de sua origem.

Com a descoberta do nêutron, em 1932 começamos a perceber um outro problema: a estabilidade nuclear. Portanto, uma nova interação, restrita ao núcleo atômico, entre os seus constituintes, era necessária tanto para justificar a sua coesão, como a origem do spin isotópico. Heisenberg estruturou essa nova interação em um grupo de simetria chamado  $SU(2)$ , colocando os prótons e nêutrons no que chamamos de um dublete de massa, pois eles têm

\* belichjr@gmail.com

† ericovbleite@gmail.com

massas muito próximas

A proposta de Heisenberg de trazer o grupo de calibre  $SU(2)$  para as interações fortes, será posteriormente retomada por Yang-Mills [3]. Mas, com os trabalhos de Dirac [4] e de Klein-Gordon, havia uma visão na física de que os mediadores das interações, quando vetoriais, no caso da interação eletromagnética via fóton, eram mediadores sem massa. E para mediadores de interação massivos, deveriam ser partículas escalares. Necessariamente os mediadores das interações fortes, por serem de curto alcance, deveriam ser escalares massivos. E essa foi uma grande influência incorporada no trabalho de 1935 de Hidek Yukawa [5] para a interação forte mediada por partículas escalares massivas. As massas eram fundamentais para justificar o curto alcance da interação nuclear forte. A partir desse alcance, Yukawa estimou as massas desses mediadores, posteriormente conhecidos como os píons de Yukawa ou mésons Pi, posteriormente detectados por Cézár Lattes, em 1947, um dos maiores nomes da física brasileira.

De forma independente, Ronald Shaw, abordava o mesmo problema em sua tese de doutorado, orientada por A. Salam. R. Shaw [6], na primeira parte de sua tese, estudava os vários tipos de partículas em conexão com as representações do grupo de Lorentz. Na segunda parte da sua tese, Shaw discute a invariância frente as transformações gerais do spin isotópico. As conclusões e resultados obtidos por Shaw, apesar de caminhos um pouco diferentes, são as mesmas obtidas por Yang-Mills. Inclusive algumas limitações, como o problema das massas dos mediadores. Isso fez com que Shaw, a revelia de Salam, não enviasse o trabalho, finalizado em janeiro de 1954, para publicação. Mas mesmo assim, Salam, em sua Nobel Lecture e em outras passagens, sempre destacou a contribuição independente de Shaw.

Neste momento surgiu uma intrigante dúvida: qual seria o processo pelo qual os bósons mediadores das interações, inicialmente sem massa inercial, a partir de um mecanismo desconhecido deveriam adquirir massa, e esta massa seria proporcional ao inverso do alcance da interação. Ao fim desse processo, se tratando da interação eletrofraca teríamos a interação fraca confinada ao núcleo atômico, devido as fato dos mediadores desta interação se tornarem massivo, e o mediador da interação eletromagnética ficar com massa nula, e portanto com a interação eletromagnética ficar de longo alcance (mediador de massa nula). Nas próximas seções vamos usar exemplos de transições de fase para estabelecer o quadro conceitual em que se formula a quebra espontânea de simetria, e como isto possibilita a explicação da origem das massas inerciais das partículas.

Em seguida vamos analisar as duas propostas de extensão do MP que se tornaram foco das pesquisas recentes de Violação da Simetria de Lorentz: a Violação Espontânea por um campo de fundo, e a violação explícita por Teorias Não-Comutativas.

## II. QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIA E FERROMAGNETISMO

Em 1956 em uma conferência em Seattle C. N. Yang, e T. D. Lee [7] mostraram que nos decaimentos radioativos, como o decaimento- $\beta$  do nêutron, deveria haver um desbalanceamento entre neutrinos com quiralidade à esquerda e neutrinos com quiralidade à direita. O artigo contendo esses resultados foi publicado na edição da Physical Review de 1957 [8] e no mesmo ano, Wu e colaboradores realizam um experimento que comprova a hipótese da violação de paridade nos decaimentos fracos. Para preservar a simetria de Lorentz, ou seja, a relatividade restrita, é necessário que as interações fracas violem a simetria de paridade. Posteriormente, Salam generaliza para o conceito de simetria quiral, uma generalização da simetria de paridade.

Restava ainda o problema das massas dos mediadores. Ao compreender que ao campo escalar deveria estar associado o setor de matéria, de massa, de uma teoria, e que os mediadores vetoriais eram a única forma de interagir preservando a simetria de Lorentz, e ao mesmo tempo violar a paridade, um resultado também experimental, Salam, em parceria com Weinberg e Goldstone iniciam uma nova jornada a respeito do papel do campo escalar e as massas dos mediadores, que tem como final dessa história, o famoso mecanismo de geração de massa, Nobel em 2013, que é o mecanismo de Higgs.

Para entender este mecanismo vamos começar discutindo o papel simetria e da quebra espontânea da simetria. Simetrias e leis de conservação são excelentes guias na formulação de modelos físicos em diversas escalas de energia. Se um sistema físico se caracteriza por estados definidos, determinadas simetrias permitem que o sistema evolua sem mudar seu estado. Existem quantidades conservadas nestes sistemas que chamamos de cargas conservadas. Se o sistema apresenta uma lei de movimento independente do tempo, a carga conservada é a energia. Se um sistema apresenta lei de movimento independente de ângulo a quantidade conservada é o momento angular. Com esta noção poderíamos questionar se haveria algum processo no qual esta simetria seria perdida? Uma visão intuitiva deste processo é a quebra de simetria espacial quando tomamos uma vareta em pé e pressionamos no sentido de comprimi-la. Não podemos prever em que direção a vareta irá dobrar, então dizemos que esta quebra da simetria de rotação ocorre de forma espontânea. Um outro exemplo, menos intuitivo relacionado com a quebra de isotropia espacial é a transição de fase do ferromagnetismo, em que o estado de mínima energia viola a simetria de rotação. A medição da transição de fase em laboratório é dada pelo gráfico abaixo da resposta magnética (magnetização) em função do campo magnético aplicado.

Conforme o gráfico da figura 1 mostra, para temperatura  $T > T_c$  quando o campo magnético é invertido a magnetização imediatamente acompanha o campo. Para  $T < T_c$  este comportamento muda [9]. Passa a existir

uma resistência pelo sistema à inversão do campo (chamada de histerese magnética). Pelo modelo de Ising, que modela uma cadeia linear de spins, podemos entender microscopicamente o que está ocorrendo. Temos antes da transição, uma cadeia linear de spins com movimento térmico aleatório, sem correlação. A medida que o sistema é resfriado os spins começam a ficar correlacionados e começam a esboçar uma resistência à inversão do campo magnético externo. Quando retiramos o campo magnético externo fica uma magnetização residual, que caracteriza um novo estado mínimo de energia do sistema.

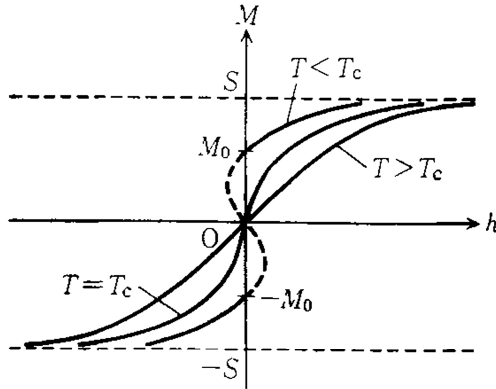


Figura 1: Transição de fase ferromagnética.

Partindo da energia livre  $G$  em função da magnetização podemos explicar o comportamento macroscópico do sistema:

$$G(M) = aM^2 + bM^4, \quad (b > 0), \quad (1)$$

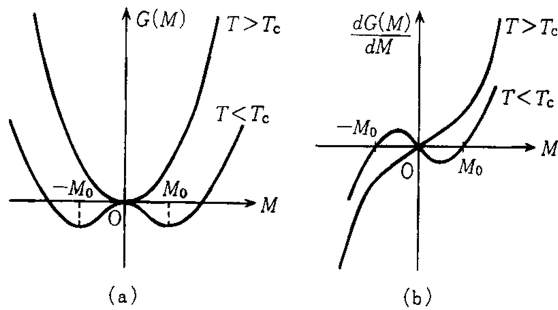


Figura 2: A energia livre que descreve o comportamento do ferromagnetismo.

sendo  $a = a_0(T - T_c)$ . Portanto o sinal de  $a$  muda quando o sistema passa pela temperatura  $T_c$ . Em temperaturas acima de  $T_c$  a energia livre do sistema apresenta um único mínimo (que é nulo). Quando o sistema

tem sua energia térmica diminuída para uma temperatura abaixo de  $T_c$ , a energia livre apresenta dois mínimos, conforme mostra a figura 2 (a). Lembrando que o campo magnético externo é obtido por  $\frac{dG}{dM} = h$ , pelo estudo do comportamento da derivada da energia livre em função da magnetização obtemos o gráfico rodado da figura 1.

Para explicar a transição ferromagnética concluímos então que a energia livre proposta descreve o comportamento observado em laboratório. Na transição, vindo de temperaturas acima de  $T_c$ , o mínimo da energia livre que é nulo, fazendo a transição para dois novos mínimos. O sistema, pensados então como uma cadeia linear de spins caindo num desses mínimos, com os spins correlacionados apontando em uma única direção, com o mínimo violando a simetria de rotacional de partida, de modo espontâneo [10] (mínimo  $\psi_0$  da figura abaixo).

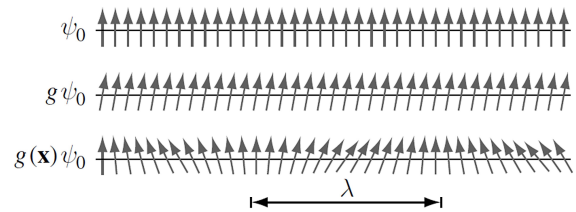


Figura 3: Os bósons de Goldstone.

Fazendo uma pequena perturbação  $g(x)$  deste mínimo vemos que esta se propaga ao longo da cadeia. Provocamos uma perturbação de alcance infinito (comprimento de onda da excitação  $\lambda$  infinito). Como temos pelo princípio de de Broglie  $p = \frac{h}{\lambda}$ , dizemos que estes são modos zero de excitação. Goldstone estabeleceu um teorema que afirma que a cada simetria global violada espontaneamente deve surgir um modo zero associado à quebra. Como consequência deste estudo estes modos ficaram conhecidos como bósons de Goldstone.

Na próxima seção vamos analisar a transição de fase supercondutora, e entender como se descreve o surgimento de um superfluido através de uma energia livre em função de um campo escalar complexo.

### III. A SUPERCONDUTIVIDADE E A INVARIÂNCIA DE CALIBRE

Na seção passada mencionamos que a simetria das leis de movimento determinam as cargas conservadas do sistema físico, e que a violação espontânea gera novos mínimos (diferentes de 0) que violam a simetria das leis de movimento. Estas simetrias não dependem de

uma determinada região, por isto elas são simetrias globais. A violação destas simetrias por uma transição de fase produzem naturalmente excitações que se propagam ao longo do sistema chamadas de Bósons de Goldstone. Nesta seção vamos estudar a transição de fase supercondutora. Devemos então procurar descrever de que modo um gás de elétrons consegue, à medida que este gás é resfriado, se transformar num superfluido que vai passar por um meio condutor sem perda de energia.

Ginzburg propôs um potencial que sofreria uma violação espontânea de simetria global semelhante ao ocorrido no caso do ferromagnetismo,

$$V = f_s - f_n = a |\psi|^2 + b |\psi|^4,$$

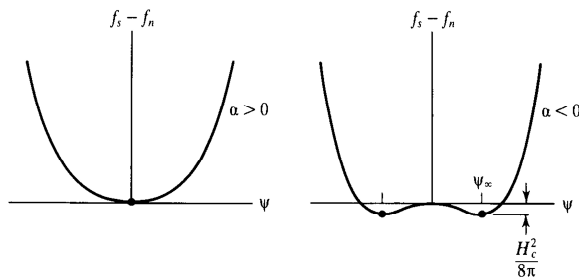


Figura 4: o potencial proposto por Ginzburg.

sendo  $a = a_0(T - T_c)$ , e o mínimo do potencial  $\psi_0$  é chamado de parâmetro de ordem, que no caso da supercondutividade é um número complexo. Este modelo se propõe a descrever uma mistura de dois fluidos: um fluido de elétrons no qual a passagem deste em um fio condutor gera dissipação, e um "superfluido" que percorre o meio condutor sem perda de energia. O número  $n_s$  de elementos que formam o superfluido é dado por  $n_s = |\psi_0|^2$ . Portanto na fase de altas temperaturas temos o mínimo  $\psi_0 = 0$ , ou seja não superfluido. Quando a amostra cai para temperaturas abaixo de  $T_c$  o potencial apresenta um mínimo  $|\psi_0|^2 = -\frac{a}{2b}$ , e temos a formação de um superfluido tênue que vai crescendo a medida que a temperatura continua diminuindo. Nesta fase temos a mistura de um fluido eletrônico com um superfluido.

Da descrição quântica do elétron em presença um campo eletromagnético sabemos que pelo acoplamento mínimo obtemos uma descrição da interação com o campo dada pela Hamiltoniana [11]:

$$H\psi = \left[ \frac{1}{m} \left| -i\hbar\nabla - \frac{e}{c} \vec{A} \right|^2 + e\phi \right] \psi, \quad (2)$$

e que as configurações de energia do elétron são representadas por estados quânticos que são funções complexas e normalizadas. O acoplamento com o potencial vetor recebe o nome de derivada covariante  $\vec{D} = -i\hbar\nabla - \frac{e}{c} \vec{A}$ .

O auto-estado de energia do elétron  $\psi$  apresenta uma simetria de fase ( calibre), que consiste em realizar a seguinte operação:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\varphi, \quad \psi = U\psi', \quad U = \exp\left(-i\frac{e}{c\hbar}\varphi\right) \quad (3)$$

e a Hamiltoniana mantém a mesma forma, e como o campo magnético é invariante frente a esta mudança, dizemos que é invariante de calibre. Podemos fazer uma visualização didática associando esta simetria à ideia de fibrado tangente

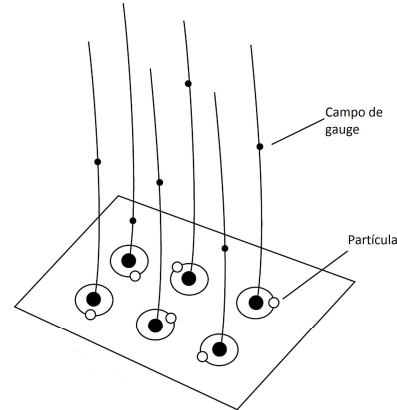


Figura 5: Temos representado na base o espaço real onde o gás de elétron se localiza, e um espaço interno ( as fibras ) que guarda a informação da fase de cada elétron do gás.

O elétron mora no espaço-tempo, e a fibra representa as fases que o elétron pode assumir (espaço interno) [12]. Como se realiza esta simetria? Ao fazer a operação  $\psi = \exp\left(-i\frac{e}{c\hbar}\varphi\right)\psi'$ , a derivada covariante se transforma como  $\vec{D} = -i\hbar\nabla - \frac{e}{c} \left( \vec{A} + (i\hbar(-i\frac{e}{c\hbar}\nabla\varphi)) \right)$ . Realizando a seguinte transformação  $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\varphi$ , ou seja, trasladando na fibra, podemos inferir que a Hamiltoniana fica mantêm a mesma forma. Na próxima seção vamos acrescentar a interação eletromagnética na energia livre do gás de elétrons, e a partir daí verificar os efeitos do campo eletromagnético na transição supercondutora.

### A. O modelo de Landau-Ginzburg

Landau percebeu que para uma explicação completa do gás de elétron em um meio material sofrer uma condensação, se transformando num fluido supercondutor era necessário levar em conta o acoplamento mínimo do elétron. Então ele acrescentou um termo a mais na energia livre proposta por Ginzburg. Desta forma se chegou à primeira formulação de um modelo que de modo macroscópico explica a supercondutividade, sem entrar nos detalhes microscópicos de como os elétrons se transfor-

mam em superfluidos, pela energia livre da forma,

$$f_s = f_n + a|\psi|^2 + b|\psi|^4 + \frac{1}{m^*} \left| \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{1}{8\pi} \left( \nabla \times \vec{A} \right)^2, \quad (4)$$

o termo cinético que reflete o acoplamento mínimo é estabelecido com a massa da partícula que compõe o superfluido  $m^*$  sendo o dobro da massa do elétron, e a derivada covariante assume a forma  $\vec{D} = -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \vec{A}$ . Eles não sabiam explicar este fato, pois somente em 1957 o mesmo Bardeen que propôs os semicondutores, juntamente com seu aluno de doutorado John Robert Schrieffer, e um pós-doc recém chegado Leon Cooper iriam formular a teoria microscópica que estabeleceu que a partícula do superfluido é formada por pares de elétron (Teoria BCS) [13].

Podemos observar a invariância de calibre fazendo a escolha do parâmetro de ordem na forma polar  $\psi = \rho(r)e^{i\chi(r)}$ . Considerando que a densidade do superfluido  $\rho(r)$  não muda, e omitindo os termos constantes a expressão (4) fica ,

$$f_s = \frac{\rho^2}{m^*} \left| \left( -i\hbar\nabla\chi - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{1}{8\pi} \left( \nabla \times \vec{A} \right)^2. \quad (5)$$

Pela transformação  $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\varphi$ , vemos que o campo magnético dado por  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}'$ , fica invariante. Fazendo a seguinte transformação do parâmetro de ordem  $\psi = \exp(-i\frac{2e}{c\hbar}\varphi)\psi'$ ,

e verificando que a derivada covariante se transforma como  $\vec{D} = -i\hbar\nabla(i\chi) - \frac{2e}{c} \left( \vec{A} + (-i\hbar(i\frac{1}{\hbar}\nabla\varphi)) \right)$ , redefinindo o campo de gauge  $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\varphi$ , notamos que a densidade de energia livre fica da forma,

$$f_s = \frac{\rho^2}{m^*} \left| i\hbar\nabla\chi + \frac{2e}{c} \vec{A}' \right|^2 + \frac{1}{8\pi} \vec{B}^2. \quad (6)$$

Portanto esta expressão é invariante de calibre. Então a descrição do gás de elétrons por este funcional termodinâmico obedece à simetria de gauge. Na próxima seção

vamos abordar como a interação eletrostática sendo de longo alcance no vazio, quando penetra numa solução eletrolítica, a interação se torna de curto alcance.

#### IV. O EFEITO DEBYE

Vamos considerar uma solução eletrolítica que é o fluido usado na fabricação de pilhas, baterias... Como se comporta o potencial eletrostático dentro deste meio? Para intuir o que deve estar ocorrendo no interior do dielétrico vamos usar a figura abaixo, que focando em uma carga positiva no centro descreve como deve ficar a distribuição das cargas em torno deste centro. se esta carga central estivesse no vazio sabemos que o potencial eletrostático seria  $\phi(r) \propto \frac{1}{r}$ . Mas como neste meio

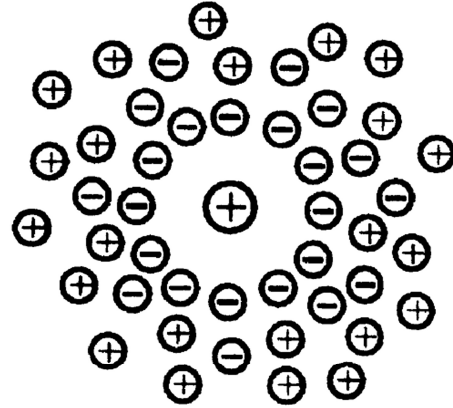


Figura 6: No dielétrico a distribuição de cargas em torno da carga central positiva tem o comportamento acima.

temos cargas podendo se movimentar, e por indução eletrostática, teríamos um comportamento da configuração radial da densidade de cargas positivas, e negativas, do tipo  $n_+ = n_0 \exp(-\frac{e\phi(r)}{K_B T})$ , e  $n_- = n_0 \exp(\frac{e\phi(r)}{K_B T})$ . Levando em conta esta configuração descrita pela figura acima, a equação de Poisson para o meio toma a seguinte forma,

$$\nabla^2\phi(r) = -4\pi e(n_+ - n_-) - 4\pi e(\delta^3(r)) \simeq -8\pi e^2 n_0 \frac{e\phi(r)}{K_B T} - 4\pi e(\delta^3(r)). \quad (7)$$

Note que usamos uma aproximação para a equação assumir a forma,

$$(\nabla^2 - \mu^2)\phi(r) = -4\pi e(\delta^3(r)),$$

sendo  $\mu^2 = 8\pi e^2 \frac{n_0}{K_B T}$ , e a solução é  $\phi(r) \propto \frac{\exp(-\mu r)}{r}$ . Veja que sem o termo  $\mu^2$  a solução seria  $\phi(r) \propto \frac{1}{r}$ , e a interação seria de longo alcance. A presença desse termo

blinda a interação, ou seja, torna a interação de curto alcance( interação massiva).

O efeito que acabamos de mencionar, de um comportamento totalmente diferente para os pequenos momentos em comparação para grandes, é bem conhecida a partir dos electrodinâmica clássicas dos meios contínuos. Em um líquido condutor (eletrólitos) as cargas são blindadas; o comprimento característico (comprimento de Debye)

corresponde ao inverso da massa  $\mu^2$ :  $\lambda_D = \frac{\hbar c}{\mu^2}$ . Isto significa que num eletrólito os fótons tem modos longitudinais. Para grandes frequências esse não é mais o caso, porque as partículas do eletrólito não pode seguir os campos que muda rapidamente, e a interação passa sem interagir com o meio ( o meio fica transparente para altas frequências).

Na próxima seção vamos estudar com a transição de fase supercondutora é capaz de gerar um termo massivo para o fóton no interior dos supercondutores. A interação eletromagnética no interior dos supercondutores é blindada. Em outras palavras se uma onda eletromagnética, ou um campo magnético penetra no meio supercondutor eles são rapidamente blindados.

### V. A VIOLAÇÃO ESPONTÂNEA DE SIMETRIA EM SUPERCONDUTORES

Iniciamos esta seção relembrando a discussão iniciada na seção 3 sobre o modelo de Landau-Ginzburg que descreve a condensação supercondutora. O numero  $n_s$  de elementos que formam o superfluido é dado por  $n_s = |\psi_0|^2$ . Portanto na fase de altas temperaturas temos o mínimo  $\psi_0 = 0$ , ou seja não superfluido. Quando a amostra cai para temperaturas abaixo de  $T_c$  o potencial apresenta um mínimo  $|\psi_0|^2 = -\frac{a}{2b}$ , e temos a formação de um superfluido ténue que vai crescendo a medida que a temperatura continua diminuindo.

Nesta fase em que a supercondutividade aparece os campos relevantes passam a ser as flutuações em torno do mínimo de energia  $\psi_0 = \sqrt{-\frac{a}{2b}}$ . Propomos então, para

estudar a fase supercondutora, a seguinte decomposição dos campos:

$$\psi = (\psi_0 + h(r)) e^{i\chi(r)}, \quad (8)$$

sendo  $h(r)$ , e  $\chi(r)$  flutuações em torno de  $\psi_0$ .

Lembrando que na transição ferromagnética temos dois mínimos, e o sistema escolhe entre um deles durante o processo. Nesta transição os modos de pequenas oscilações em torno do mínimo são oscilatórios. Diferentemente na supercondutividade nos temos um grau de liberdade a mais devido ao parâmetro de ordem ser um número complexo. A fase  $\chi(r)$  vai dar uma giro em torno do eixo  $y$  gerando um gráfico de potencial conhecido como chapéu mexicano. O modo  $\chi(r)$  em torno do mínimo não tem esta característica oscilatória. Comparando o gráfico do chapéu mexicano a uma garrafa com fundo de mesmo formato, para mover uma bolinha no fundo da garrafa ao longo da canaleta fazendo a bolinha girar em círculos, não encontramos resistência (Figura 7). Já para deslocar a bolinha que está no mínimo ao longo da direção radial, como este modo é oscilatório encontramos resistência.

A derivada covariante agindo nesta decomposição gera,

$$\begin{aligned} \vec{D}\psi &= \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\vec{A} \right) \left( (\psi_0 + h(x)) e^{i\chi(r)} \right) \\ &= \left( -i\hbar\nabla h(x) + \hbar \left( \nabla\chi - \frac{2e}{\hbar c}e\vec{A} \right) (\psi_0 + h(x)) \right) e^{i\chi(r)}, \end{aligned} \quad (9)$$

e calculando o bilinear,

$$\begin{aligned} \vec{D}\psi \left( \vec{D}\psi \right)^* &= \left[ \left( -i\hbar\nabla h(x) + \hbar \left( \nabla\chi - \frac{2e}{\hbar c}\vec{A} \right) (\psi_0 + h(x)) \right) \right] \left[ \left( i\hbar\nabla h(x) + \hbar \left( \nabla\chi - \frac{2e}{\hbar c}\vec{A} \right) (\psi_0 + h(x)) \right) \right], \\ &= \hbar^2\nabla h\nabla h + \left( \nabla\chi - \frac{2e}{c}\vec{A} \right) \left( \nabla\chi - \frac{2e}{c}\vec{A} \right) (\psi_0 + h(x))^2. \end{aligned} \quad (10)$$

temos a contribuição que deve aparecer na energia livre (4),

$$f_s = f_n + a|\psi_0 + h|^2 + b|\psi_0 + h|^4 + \frac{1}{8\pi} \left( \nabla \times \vec{A} \right)^2 + \frac{1}{m^*} \left( \hbar^2\nabla h\nabla h + \left( \nabla\chi - \frac{2e}{c}\vec{A} \right) \left( \nabla\chi - \frac{2e}{c}\vec{A} \right) (\psi_0 + h(x))^2 \right) \quad (11)$$

Fazendo uma mudança de calibre  $\vec{C} = \vec{A} - \frac{c}{2e}\nabla\chi$

$$f_s = f_n + a|\psi_0 + h|^2 + b|\psi_0 + h|^4 + \frac{1}{8\pi} \left( \nabla \times \vec{C} \right)^2 + \frac{1}{m^*} \left( \hbar^2\nabla h\nabla h + \left( \frac{2e}{c}\vec{C} \right)^2 (\psi_0 + h(x))^2 \right), \quad (12)$$

Calculando a eq. de movimento para o campo  $\vec{C}$ :

$$\begin{aligned} \delta_{\vec{C}} f_s &= \frac{1}{m^*} (\psi_0 + h(x))^2 \left( \frac{2e}{c}e\vec{C} \right) \frac{2e}{c} \left( \delta\vec{C} \right) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \left( \nabla \times \vec{C} \right) \nabla \times \left( \delta\vec{C} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

Fazendo  $\delta_A f_s = 0$ , e usando que  $\nabla \times (\nabla \times \vec{C}) = \nabla \cdot (\nabla \vec{C}) - \nabla^2 \vec{C}$ , e que na fase supercondutora implica em  $\nabla \chi = 0$ , no gauge de Landau ( $\nabla \vec{A} = 0$ )

$$\left[ \frac{(\psi_0 + h(x))^2}{m^*} \left( \frac{2e}{c} \right)^2 \vec{C} - \frac{1}{4\pi} \nabla \times (\nabla \times \vec{C}) \right] (\delta \vec{C}) = 0, \quad \left( \nabla^2 - 4\pi \frac{(\psi_0 + h(x))^2}{m^*} \left( \frac{2e}{c} \right)^2 \right) \vec{C} = 0, \quad (14)$$

Desprezando o termo de flutuação  $h(r)$  note que obtemos um termo de massa  $\mu^2 = 4\pi \left( \frac{2e}{c} \right)^2 \frac{\psi_0^2}{m^*}$ , semelhante ao caso do potencial eletrostático. Então vemos que em um meio supercondutor a interação eletromagnética não consegue se propagar, pois tem uma blindagem promovida pelo termo  $4\pi \left( \frac{2e}{c} \right)^2 \frac{\psi_0^2}{m^*}$ . Este efeito ficou conhecido em supercondutividade como efeito Meissner.

Quem primeiro entendeu a não propagação do fóton num meio supercondutor devido á geração do termo massivo foi P. W. Anderson. Curiosamente ele também fez uma importante observação - deveria se esperar no espectro das excitações bósons sem massa, pois a simetria de calibre foi espontaneamente quebrada. Mas os bósons de Goldstone nunca foram observados na transição de fase supercondutora!

Na próxima seção vamos elucidar porque a supercondutividade tem este comportamento diferente da quebra espontânea de simetrias globais.

### A. Perda da simetria de calibre e o o Mecanismo de Higgs

Na transição de fase supercondutora todos os componentes do superfluido se encontram na mesma fase, e formam um grande bolha de estado coerente. Isto justifica a escolha adotada na seção passada de se considerar  $\nabla \chi = 0$ .

Vamos recordar como, ao longo do desenvolvimento deste capítulo, se realiza a liberdade de gauge. Ao fazer a transformação no parâmetro de ordem,  $\psi = \exp(-i \frac{e}{\hbar c} \varphi) \psi'$ , a derivada covariante se transforma como  $\vec{D} = -i\hbar \nabla (i\chi) - \frac{e}{c} \left( \vec{A} + (-i\hbar (i \frac{1}{\hbar} \nabla \varphi)) \right)$ . Realizando a seguinte transformação na fase  $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \varphi$ , ou seja, transladando na fibra, vemos que a energia livre invariante. Pela transformação  $\vec{C} = \vec{C}' + i\hbar \frac{e}{2c} \nabla \varphi$ , vemos que o campo magnético dado por  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ , fica invariante.

$$\psi = \exp(-i \frac{e}{\hbar c} \varphi) \psi', \quad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \varphi. \quad (15)$$

Note que quando perdemos o operado nabla da expressão da energia livre pela substituição  $\vec{C} = \vec{A} - \frac{\hbar c}{2e} \nabla \chi$ ,

não podemos mais absorver a mudança de fase pelo campo de gauge, desta forma a simetria de calibre é perdida, restando uma simetria global de fase, como na figura abaixo.

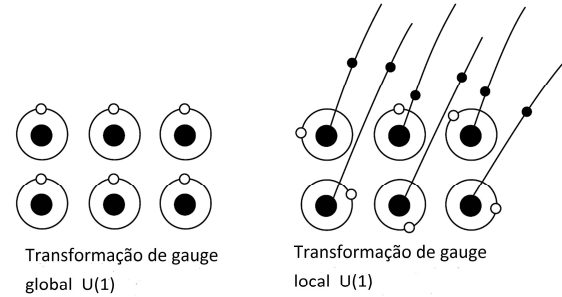


Figura 7: Na fase supercondutora os componentes elementares do condensado ficam todos com a mesma fase.

Deste modo vemos que o termo  $\nabla \chi$ , que forneceria os modos de Goldstone desta transição é "engolido", e por isto nenhuma excitação bosônica de massa nula é observada no espectro. Por este motivo que os bósons de Goldstone nunca foram observados na transição de fase supercondutora.

Na próxima seção vamos estudar a versão relativística do modelo de Landau-Ginzburg com a finalidade de, através do exemplo fóton adquirindo massa num meio supercondutor, e perdendo a simetria de fase, ou simetria local  $U(1)$ , chegamos a contextualizar o surgimento do campo de Higgs.

### B. A versão relativística e o Campo de Higgs

É interessante observar que a transição supercondutora tem um mecanismo similar á transição de fase que ocorre no Modelo Padrão conhecida com a transição eletrofraca. O mecanismo de geração de massa de mensageiros das interações é bastante similar. Em supercondutividade o bóson intermediário que ganha massa é o fóton, com a simetria abeliana de calibre  $U(1)$  violada. Na transição eletrofraca os bósons intermediários que ganham massa são 3:  $W_{\pm}$  e  $Z_0$ , sendo que a simetria violada é a de calibre  $SU(2)$ . Deste modo resulta que temos os mediadores da interação fraca com massa, tornando a interação de curto alcance, confinada ao interior dos núcleos atômicos. Resulta, deste processo, que temos 3 bósons massivos, e o fótons sem massa, ou seja, a interação eletrofraca se separa em duas interações, uma de curto alcance (interação fraca), e outra de longo alcance (eletromagnetismo). O parâmetro de ordem na supercondutividade vai aparecer no Modelo Padrão como o campo escalar de Higgs, e na fase quebrada, as excitações em torno do mínimo

do campo escalar massivo é identificada como o bóson de Higgs.

A versão covariante da energia livre do modelo de Landau Ginzburg é dada pela ação (adotando  $\hbar = c = 1$ ) [14],

$$\Sigma = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \psi)^* D^\mu \psi + a |\psi|^2 + b |\psi|^4 \right\}, \quad (16)$$

sendo que os índices gregos como  $\mu, \nu$ , tem quatro componentes indexados de 0 (dimensão temporal) a 4 [14]. A derivada covariante assume a forma:

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + ie A_\mu \psi. \quad (17)$$

Esta simetria é quebrada espontaneamente, e o novo vácuo é dado pela expressão

$$\psi_{\min} = \psi_0, \quad (18)$$

onde

$$\psi_0 = \left( -\frac{a}{2b} \right)^{1/2}; \quad a < 0. \quad (19)$$

Como na seção anterior, nós adotamos a parametrização polar

$$\psi = (\psi_0 + h(x)) e^{i\chi(r)}, \quad (20)$$

sendo  $h(x)$ , e  $\chi(r)$  são as flutuações quânticas escalares. A derivada covariante age no campo escalar complexo da forma,

$$D_\mu \psi = D_\mu (\psi_0 + h(x)) e^{i\chi(r)} = (\partial_\mu h(x) + i(\partial_\mu \chi + e A_\mu) (\psi_0 + h(x))) e^{i\chi(r)}, \quad (21)$$

e temos,

$$\begin{aligned} D_\mu \psi (D^\mu \psi)^* &= \left[ \left( \partial_\mu h(x) + ie \left( \frac{1}{e} \partial_\mu \chi + A_\mu \right) (\psi_0 + h(x)) \right) \right] \left[ \left( \partial^\mu h(x) - ie \left( \frac{1}{e} \partial^\mu \chi + A^\mu \right) (\psi_0 + h(x)) \right) \right], \\ &= \partial_\mu h \partial^\mu h + e^2 \left( \frac{1}{e} \partial_\mu \chi + A_\mu \right) \left( \frac{1}{e} \partial^\mu \chi + A^\mu \right) (\psi_0 + h(x))^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Redefinindo o campo de gauge como  $C_\mu = \frac{1}{e} \partial_\mu \chi + A_\mu$ , observamos que  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu$  fica invariante, e o lagrangeano (16) se escreve como,

$$\Sigma = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \psi)^* D^\mu \psi - V(\psi) + \mathcal{L}_{int} \right\}, \quad (23)$$

com

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{2} e^2 C_\mu C^\mu (h + 2\psi_0) h - \frac{b}{4} (h + 4\psi_0) h^3, \quad (24)$$

vemos então que aquele campo de fase  $\chi$  que era o bóson de Goldstone, no caso  $U(1)$  global, é absorvido no setor vetorial produzindo um campo  $B_\mu$  massivo. Ficamos então com um bóson vetorial massivo dado pelo lagrangeano,

$$\mathcal{L}_{boson} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu) (\partial^\mu C^\nu - \partial^\nu C^\mu) + \mu^2 C_\mu C^\mu, \quad (25)$$

sendo  $\mu^2 = \frac{\psi_0 e^2}{2}$ , e ainda um campo escalar massivo

$$\mathcal{L}_{boson} = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - a^2 h^2, \quad (26)$$

que ficou conhecido como bóson de Higgs.

O Modelo Padrão conseguiu unificar a teoria fraca e o eletromagnetismo através da simetria local onde os campo de calibre obedecem, não a uma simetria abeliana  $U(1)$  mas a uma simetria  $SU(2)$ . Esta prescrição do modelo padrão nos mostra que em energias acima de  $10^2 GeV$ , o campo de Higgs tem um mínimo de energia nulo e temos, nesta fase uma teoria de calibre invariante local  $SU(2)$ , conhecida como teoria eletrofraca, tendo quatro bósons intermediários sem massa. A medida que o universo vai resfriando com energia média chegando a ficar menor que  $10^2 GeV$ , o campo de Higgs, que permeia todo universo, começa a se condensar e a simetria  $SU(2)$  é violada espontaneamente. Deste processo resulta que 3 bósons  $W_\pm$  e  $Z_0$ , adquirem massa, portanto sendo mediadores da interação fraca tem um curto alcance (a interação fica restrita ao interior dos núcleos atômicos). O quarto bósons fica sem massa seria o responsável por descrever a interação eletromagnética que é de longo alcance. O Universo passa a ser um grande supercondutor realizando a blindagem da teoria Fraca, que passa a atuar nos domínios do núcleo atômico. Em 2013



com a medição do bóson de Higgs realizada pelo LHC se confirma o receituário de geração de massa inercial adquirida pelas partículas fundamentais. Este mecanismo de geração de massa (mecanismo de Higgs) por um campo escalar permitiu a unificação da força eletromagnética com a força fraca, e possibilitou de se ter uma aceitação completa do MP como a teoria que explica a origem das partículas. Do ponto de vista das forças fundamentais fica somente de fora do modelo a gravitação. Apesar do se tremendo sucesso o modelo está incompleto, e nós precisaríamos de uma teoria que abarcasse todas as forças. Se entendermos a gravitação como uma teoria fundamental ela deveria ser quantizada e o bóson que transmite a força gravitacional seria o gráviton. A medida que se aumenta a escala de energia para próximo da Planck os efeitos da gravitação quântica seriam perceptíveis e se supõe que simetria de Lorentz deveria ser violada, indo para essa escala de energia. Então, resta a dúvida de que forma a simetria de Lorentz poderia ser violada numa teoria mais fundamental que incorporasse a gravitação quântica. Trataremos disto nas próximas seções.

## VI. VIOLAÇÃO DE SIMETRIA DE LORENTZ

Até agora fizemos uma breve apresentação dos aspectos básicos do que se constituiu como a teoria que explica a origem das partículas fundamentais da natureza: o Modelo Padrão (MP). Este modelo é uma aproximação de baixas energias de uma teoria mais fundamental que englobaria a interação gravitacional. À medida que caminhamos para escalas de energia que se aproximem da escala de Planck se espera que uma simetria fundamental das teorias relativísticas seja modificada. Tal possibilidade de violação levaria a duas principais formulações de como ela se daria: de forma espontânea ou através de Teorias Não-Comutativas.

### Violação Espontânea

Esse tipo de violação é considerado uma forma mais "suave" de como a simetria de Lorentz. A quebra de simetria, entre algumas das propostas aceitas, aconteceria pela presença de um campo de fundo e está incluído em uma forma estendida do modelo padrão e teoria de cordas.

### Teorias Não-Comutativas

Esta segunda forma de quebra de Lorentz, via álgebra Não-Comutativa, parte da ideia de um espaço quantizado proposto por Snyder [15] em 1947, o que nos leva a relação comutação  $[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$ . Sendo  $\theta^{\mu\nu}$  uma matriz assimétrica, temos direções preferenciais e dessa forma uma quebra na simetria. Dessa forma, temos uma quebra mais "dura" da simetria de Lorentz.

Apresentaremos agora de maneira mais detalhada as diferenças entre as duas propostas apresentadas acima.

## A. Violação de Simetria de Lorentz por Campo de Fundo

A busca de uma teoria que descreva a física de uma maneira unificada não se origina de um desejo meramente estético, mas da certeza de que esta construção nos faz compreender mais profundamente os processos naturais, e abre possibilidades nunca antes pensadas. A procura de uma simetria fundamental que descreva o Universo quente primordial, e à medida que este se esfria apareçam novos cenários por quebra espontânea e simetria de Lorentz, tem se estabelecido fortemente desde que este mecanismo foi proposto. Vamos nos ater à descrição conceitual de como esta quebra ocorre. Para isto vamos começar descrevendo a simetria de Lorentz. Para formular a teoria da relatividade restrita Einstein se baseou em dois princípios:

1 - As leis da física são idênticas em qualquer referencial inercial.

2 - A velocidade da luz no vácuo é a mesma em qualquer sistema de referência inercial.

Então, com base nesses princípios, podemos esperar que qualquer referencial inercial veja a luz se propagando esféricamente com velocidade  $c = 3.10^8 m/s$ . Tomando dois referenciais inercias que no instante inicial  $t = 0$  coincidam de posição e se afastem com velocidade  $\vec{v}$ , temos então a luz se propagando vista por dois referenciais  $O$

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0, \quad (27)$$

e  $O'$

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0, \quad (28)$$

Estabelecemos então a seguinte igualdade,

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (29)$$

A igualdade acima pode ser solucionada por meio de

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma \left( ct - \frac{v}{c}x \right) \\ y' &= y \\ x' &= \gamma(x - vt) \\ z' &= z \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

Podemos realizar mudanças entre referenciais inerciais de duas maneiras distintas [16]:

1 - Ponto de vista passivo - quando deixamos os pontos pertencentes ao espaço-tempo intactos e relacionamos as bases de dois sistemas de referenciais inerciais.

2 - Ponto de vista ativo - ao invés de mudarmos nosso sistema de referência, deixamos nossa base fixa e quem se movimenta são os pontos do espaço-tempo.

Entre os dois tipos de mudança de referencial mostrados acima, apenas o segundo ponto de vista será abordado aqui.

1. Boost Ativo em um Campo Elétrico Uniforme

Considere dois referenciais inerciais  $S$  e  $S'$  imersos entre duas placas de um capacitor com campo elétrico  $\vec{E}$  constante. O primeiro referencial está em repouso em relação as placas, enquanto que o segundo,  $S'$  (boost passivo) [16], move-se com velocidade  $\vec{u}$  de forma ortogonal ao campo  $\vec{E}$ .

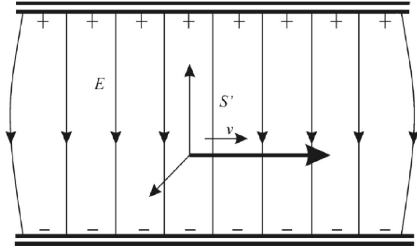


Figura 8: Diferença de trajetória de uma partícula carregada antes e depois de ser aplicado a ela um "empurrão" de  $-\vec{v}$  sobre ela.

Suponha agora uma partícula carregada eletricamente entre as placas do capacitor, movendo-se no mesmo sentido de  $S'$ . Devido ao campo elétrico, a partícula sofre um desvio em sua trajetória que é visto por ambos os referenciais de maneira equivalente. Porém, se aplicarmos um *boost* de Lorentz de  $-\vec{v}$  (boost ativo) [16] sobre ela, o haverá uma divergência entre o alcance das trajetórias vistas por ambos referenciais. Esse comportamento fica ilustrado na figura abaixo:

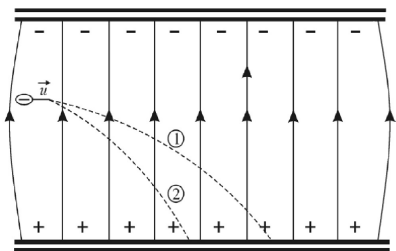


Figura 9: Diferença de trajetória de uma partícula carregada antes e depois de ser aplicado a ela um "empurrão" de  $-\vec{v}$  sobre ela.

A diferença entre ambas as trajetórias se dá devido a presença do campo de fundo atuando sobre a partícula. Logo, a simetria de Lorentz é quebrada pelo campo de fundo presente entre as placas.

Para exemplificar como esta proposta entra como extensão do setor fotônico do MP vamos estabelecer brevemente na seção seguinte a ação nova que ficou conhecida como o setor ímpar do Modelo Padrão Estendido (MPE) [17] que viola a simetria CPT.

B. Setor ímpar do MPE

O objetivo desta seção é através do formalismo quadri-vetorial do eletromagnetismo, analisar de maneira direta qual a influência da Violação Espontânea da Simetria de Lorentz (VESL), que gera um campo de fundo  $V^\mu$  (esse campo de fundo cumpre o mesmo papel do campo elétrico no exemplo do capacitor), na equação da onda eletromagnética. Então começamos estabelecendo a ação do setor de gauge ímpar do MPE:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}V^\mu A^\nu F^{\alpha\beta}. \quad (30)$$

Realizando o cálculo variacional em relação ao campo  $A^\nu$  temos como equação de movimento,

$$\partial^\mu F_{\mu\lambda} + \frac{1}{2}\epsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}V^\mu A^\nu F^{\alpha\beta} = 0. \quad (31)$$

Fazendo procedimentos usuais para se achar a equação de onda chegamos à seguinte relação de dispersão:

$$(K^\mu K_\mu)^2 + K^\mu K_\mu V^\nu V_\nu - K^\mu V_\mu = 0 \quad (32)$$

Essa nova forma da equação da onda eletromagnética nos permite ver a consequência direta do vetor de fundo na propagação da onda. Não é o nosso objetivo estudar os efeitos na propagação da onda (tais como geração de massa e alteração da velocidade da onda). Ressaltamos, porém [18] que essa relação de dispersão apresenta o efeito da birrefringência do vácuo. Na próxima seção iremos apresentar uma nova proposta da violação da simetria de Lorentz. Esta quebra não seria resultado da extensão do mecanismo de Higgs por um campo quadri-vetorial, mas de maneira explícita, por uma teoria não-comutativa. Para efeito de comparação, ao final das notas iremos apresentar a equação de onda eletromagnética resultante dessa interação e comparar com a equação obtida pela quebra espontânea da simetria de Lorentz. Na próxima seção iremos apresentar as Teorias Não Comutativas pelo artigo de revisão do professor Victor Rivelles [19].

VII. VIOLAÇÃO DE SIMETRIA DE LORENTZ POR TEORIA NÃO-COMUTATIVA

O princípio da incerteza de Heisenberg  $\Delta x^i \Delta p^j > \delta^{ij} \hbar$  estabelece que, se quisermos sondar curtas distâncias, precisamos ir para altas energias. A relatividade geral nos ensina que se continuarmos aumentando a energia para explorar regiões menores, um buraco negro será formado, ou seja, assim que ultrapassarmos o raio de Schwarzschild. Como nenhuma informação pode escapar de um buraco negro, parece que existe um limite inferior para medir comprimentos. Ou seja, deve existir uma relação de incerteza para as coordenadas

$$\Delta x^\mu \Delta x^\nu > \theta^{\mu\nu},$$

sendo que  $\theta^{\mu\nu}$  tem dimensão de (length)<sup>2</sup>, e então, não temos mais uma relação de comutação entre os operadores de posição. Por  $\theta^{\mu\nu}$  se tratar de uma grandeza antissimétrica, logo, ter uma direção privilegiada, temos aqui uma quebra na simetria de Lorentz.

Da teoria de Heisenberg sabemos que para comprimentos cada vez menores é necessário quantidades de energia mais elevadas. Porém, ao tentarmos explorar essas regiões aumentando a energia aplicada, criaremos singularidades no espaço assim como nos diz a relatividade geral. Concluímos então uma incerteza também nas coordenadas de posição

A ideia de não comutatividade é antiga ... Na década de 30 Heisenberg [20] estava se debatendo com as divergências ultravioletas da QED e achava que coordenadas não-comutativas poderiam fornecer um ponto de corte para regulá-las. Em contato com Peierls, Pauli, e Oppenheimer, Heisenberg discutiu esta possibilidade. Em seguida Oppenheimer discutiu com um de seus alunos, Snyder, para que pensasse sobre esta possibilidade. Disto resultou que, em 1947, Snyder escreveu um artigo em que considerava as seguintes relações de comutação [15].

$$\begin{aligned} [x^\mu, x^\nu] &= i\ell^2 \hbar^{-1} (x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu), \\ [x^\mu, p_\nu] &= i\hbar \delta_\nu^\mu + i\ell^2 \hbar^{-1} p^\mu p_\nu, \\ [p_\mu, p_\nu] &= 0, \end{aligned} \quad (33)$$

generalizando as relações usuais com uma nova constante  $\ell$ . No entanto, o programa de renormalização para QED começou a se tornar bem sucedido, e os estudos posteriores em não-comutatividade foram desencorajados. Mesmo assim, podemos perguntar como podemos fazer teoria de campo com coordenadas não-comutativas satisfazendo um conjunto mais simples de relações de comutação,

$$\begin{aligned} [\hat{q}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar \delta_{ij}, \\ [\hat{q}_i, \hat{q}_j] &= i\theta_{ij}, \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= 0, \end{aligned}$$

sendo  $\theta_{ij}$  uma matriz antissimétrica constante. Na próxima seção iremos trabalhar com uma teoria que exemplifica na prática como se manifestam as propriedades físicas de uma sistema que obedece a uma álgebra não-comutativa.

## VIII. EFEITO HALL QUÂNTICO: EXEMPLO DE UMA TEORIA NÃO-COMUTATIVA

### A. Quantização de Landau

Uma das descobertas mais significativas dos anos 80 é o efeito Hall quântico [21]. Normalmente, em experimentos de estado sólido, processos de espalhamento (efeitos de temperatura, impurezas e defeitos na estrutura cristalina) no transporte eletrônico introduz incerteza em vários processos de medida [22]. Por exemplo, a

condutância, ou resistência de um material descrito pelo modelo de Drude nos conduz à expressão conhecida da resistência de um fio condutor  $R = \rho_0 \frac{A}{L}$ , sendo  $\rho_0$  a resistividade,  $A$  a área transversa, e  $L$  o comprimento. O efeito Hall clássico, que consiste na resistência transversa quando uma chapa metálica é submetida a um campo magnético perpendicular, apresenta um comportamento muito diferente quando a baixas temperaturas e com poucos centros espalhadores.

No efeito Hall os elétrons ficam presos em uma fina camada feita na interface entre semiconductor [23] e isolante ou entre semicondutores a uma temperatura suficientemente baixa. Elétrons presos formam um sistema bidimensional. Em um campo magnético perpendicular  $\vec{B}$ , a energia de um elétron é quantificada em níveis de Landau. A diferença de energia entre dois níveis de Landau sucessivos é com  $w_c = \frac{e\vec{B}L}{M}$  a frequência de ciclotron. É notável que os níveis de energia de um corpo são quantificado em um sistema macroscópico.

#### 1. Elétrons interagindo com o campo eletromagnético

Os elétrons interagindo com um campo eletromagnético tem como expressão de força:

$$m\ddot{x} = -e(\vec{E} + \dot{x} \times \vec{B}); \quad (34)$$

esta é a conhecida força de Lorentz.

A langrangeana que gera esta lei é:

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - e\vec{A}(t, x) \cdot \dot{x} + e\varphi(t, x), \quad (35)$$

sendo que  $\vec{A}(t, x)$  e  $\varphi(t, x)$  são o potencial vetor e escalar. O momento cinético do campo é:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m\dot{x}_j - eA_j; \quad (36)$$

impondo a relação de comutação canônica

$$[x_i, p_j] = -i\hbar, \quad (37)$$

com o operador momento  $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\nabla$ , e o Hamiltoniano dos campos é:

$$H = \int dx^3 \Psi^\dagger(t, x) \left[ \frac{1}{2m} \left( -i\hbar\nabla + e\vec{A} \right)^2 + e\varphi(t, x) \right] \Psi(t, x), \quad (38)$$

### B. Os níveis de Landau do elétron confinado em uma placa metálica

O movimento do elétron confinado numa placa metálica ( no plano xy) submetido a um campo magnético perpendicular externo  $-\vec{B}_z$

$$H = \frac{1}{2m} [(-i\hbar\partial_x + eA_x) + (-i\hbar\partial_y + eA_y)], \quad (39)$$

como momento cinético

$$p_x = -i\hbar\partial_x + eA_x, \quad e \quad p_y = -i\hbar\partial_y + eA_y, \quad (40)$$

A partir de agora vamos definir as coordenadas de centro

$$X = x + \frac{1}{eB_z}P_y, \quad Y = y - \frac{1}{eB_z}P_x. \quad (41)$$

Podemos verificar as seguintes relações de comutação

$$[X, Y] = -il_B^2 \quad [P_x, P_y] = i\frac{\hbar^2}{l_B^2},$$

$$[X, P_x] = [Y, P_y] = [X, P_y] = [Y, P_x] = 0,$$

portanto as coordenadas de centro  $\mathcal{X} = (X, Y)$  e os momentos covariantes  $(P_x, P_y)$  são variáveis independentes. Nós também introduzimos o comprimento  $l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB_z}}$  que é o comprimento característico onde ocorre o efeito Hall.

As excitações nos níveis de Landau são suprimidas quando a intensidade do campo magnético é grande o suficiente (a figura ilustra esta situação). Uma teoria auto-consistente sem essas excitações é construída fazendo a projeção em nível de Landau. Um elétron confinado a um único nível de Landau é descrito pelo centro de orientação  $(X, Y)$  sujeito a não comutatividade.  $[X, Y] = -il_B$ . Deste modo conseguimos ver que existe um comprimento mínimo associado como consequência dessa teoria não-comutativa (figura 11).

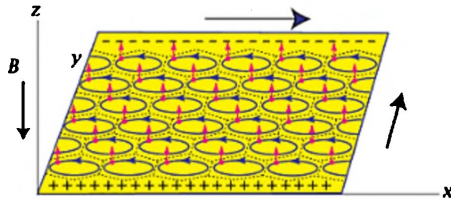


Figura 10: Armadilhamento dos elétrons no primeiro nível de Landau

Assim, o Efeito Hall Quântico (EHQ) nos fornece um mundo realista de geometrias não-comutativas para se experimentar. Apresenta não apenas uma boa aproximação, mas também uma maneira essencial de revelar nova física inerente ao EHQ. Um estudo completo é encontrado em [23] e na próxima seção iremos fazer uma revisão da implementação desta ideia não física de altas energias baseando-nos em artigos mais didáticos da área.

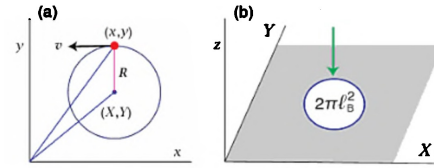


Figura 11: Comprimento mínimo.

### C. Teorias de Campos Não-Comutativas

O estudo de radiação de corpo negro pelo eletromagnetismo clássico levou a uma contradição com os dados experimentais. Um corpo negro consiste em um objeto que absorve toda a radiação incidente sobre ele. A potência emitida por uma cavidade ressonante diverge à medida que a frequência da radiação emitida aumenta. A hipótese de Planck veio a sanar este problema. O programa de quantização estendido a campos eletromagnéticos trouxe uma série de divergências que precisavam ser tratadas. As Teorias Não-Comutativas seriam possibilidades a ser investigada. No entanto, o programa de renormalização para QED começou a dar conta de resultados experimentais (o desvio lambda, e o dipolo magnético anômalo do elétron) e, portanto, novos estudos sobre não-comutatividade foram desencorajados.

Mesmo assim, podemos perguntar como podemos fazer a teoria de campo com coordenadas não-comutativas, satisfazendo um conjunto mais simples de relações de comutação

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (42)$$

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = i\theta_{ij},$$

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0,$$

com  $\theta_{ij}$  sendo uma matriz antissimétrica constante. Podemos fazer uma associação de campos  $\phi(x)$  com o espaço usual com coordenadas comutativas  $x^i$  para objetos com valor de operador  $\hat{\Phi}(\hat{q})$  como

$$\hat{\Phi}(\hat{q}) = \int dp e^{ip\hat{q}} \tilde{\phi}(p), \quad (43)$$

sendo que  $\tilde{\phi}(p)$  é a transformação usual de Fourier  $\phi(x)$ ,  $\tilde{\phi}(p) = \int dx e^{-ipx} \phi(x)$ . Usando a formula de Hausdorff-Campbell para o produto dos campos não comutativos obtemos

$$\hat{\Phi}_1(\hat{q})\hat{\Phi}_2(\hat{q}) \leftrightarrow (\phi_1 \star \phi_2)(x), \quad (44)$$

este é conhecido como produto estrela ou produto Moyal

$$(\phi_1 \star \phi_2)(x) \equiv \left[ e^{i\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu}} \phi_1(x)\phi_2(y) \right]_{y=x} = \phi_1(x)\phi_2(x) + i\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_1(x)\partial_\nu \phi_2(x) + \dots \quad (45)$$

Desta forma, podemos trabalhar no espaço usual com coordenadas comutativas e campos convencionais, mas substituindo o produto comum dos campos pelo produto Moyal. Deste modo amplia-se a quantização canônica de tais teorias de campo, e um resultado notável é que a estrutura das divergências ultravioletas não é modificada pelo produto Moyal [24]. Isto é bastante surpreendente, porque quando o produto Moyal é expandido, há um número infinito de termos de derivadas mais altas que contribuem para os vértices de interação nos diagramas de Feynman. Esperaríamos que a estrutura ultravioleta fosse estragada, mas a estrutura da Moyal funciona de maneira a preservá-la. No final, o sonho de Heisenberg de usar a não-comutatividade para domar as divergências não se tornou realidade.

Além da importância do trabalho de Filk em 1996, esta proposta não chamou muita atenção, já que poucas pessoas estavam interessadas em não-comutatividade naqueles dias. A revolução na não-comutatividade teve que esperar mais alguns anos por outra importante descoberta, mas desta vez na teoria das cordas. *Dp*-branes são objetos estendidos em dimensões de espaço *p* nas quais strings abertas podem terminar [25]. A não-comutatividade é induzida pelo produto Moyal com  $\theta_{\mu\nu}$ , e deve ter um comportamento tal que a baixas energias consigamos recuperar as teorias conhecidas na escala do Modelo Padrão (MP) da Física de Partículas, já que essas Teorias Não-Comutativas surgiram de um truncamento consistente da teoria das cordas, elas devem ser consistentes em algum sentido e isso deu origem a um período intenso de pesquisa em teorias de campo não-comutativas. Desde então, a proposta de não-comutatividade tem sido aplicada a muitas áreas da física e da matemática e seria impossível rever todos os avanços ocorridos ao longo desses anos. Tópicos como teoria quântica de campos e a gravidade são tratados em bons artigos de revisão [26, 27].

A Teoria Não-Comutativa de calibre abeliano é descrita pela ação

$$S_A = -\frac{1}{4} \int d^4x \hat{F}^{\mu\nu} \star \hat{F}_{\mu\nu},$$

com a força de campo e transformação do medidor modificada pela adição do comutador Moyal  $[\hat{A}, \hat{B}]_\star = \hat{A} \star \hat{B} - \hat{B} \star \hat{A}$  como

$$\begin{aligned} \hat{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu - i[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu]_\star, \\ \delta \hat{A}_\mu &= \hat{D}_\mu \hat{\lambda} = \partial_\mu \hat{\lambda} - i[\hat{A}_\mu, \hat{\lambda}]_\star. \end{aligned}$$

A versão não comutativa do campo de calibre  $\hat{A}_\mu$  pode ser mapeado para o campo de calibre abeliano convencional  $A_\mu$ , com a transformação feita através do mapa de Seiberg-Witten, que consiste na aproximação de primeira ordem em  $\theta$  [25]

$$\hat{A}_\mu = A_\mu - \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} A_\alpha (\partial_\beta A_\mu + F_{\beta\mu}).$$

A teoria de calibre abeliana resultante é agora uma teoria de interação com ação

$$S_A = -\frac{1}{4} \int d^4x \left[ F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + 2\theta^{\mu\rho} F_\rho{}^\nu \left( F_\mu{}^\sigma F_{\sigma\nu} + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) \right].$$

Isto dá origem a uma teoria não renormalizável devido às novas interações geradas pela não comutatividade, e suas propriedades foram estudadas por vários grupos. Dualidades entre teorias de calibre geralmente não sobrevivem após o mapa de Seiberg-Witten [28, 29].

A existência de um tensor antissimétrico constante  $\theta_{\mu\nu}$  significa que a simetria de Lorentz está quebrada. No entanto, isso não significa que a ela não seja válida em um nível fundamental. Podemos pensar em  $\theta_{\mu\nu}$  como um campo (como na teoria das cordas) que tem um valor de expectativa de vácuo constante quebrando-a espontaneamente. Assim, uma das manifestações da não-comutatividade é através de pequenos desvios da simetria de Lorentz. As equações não-comutativas de Maxwell para o campo abeliano convencional mostram que o fóton tem uma relação de dispersão modificada [30],

$$K^2 - 2\theta^{\mu\alpha} F_\alpha{}^\nu K_\mu K_\nu = 0. \quad (46)$$

Isto é semelhante ao que acontece aos fótons em um meio anisotrópico sem rotação de Faraday nem birrefringência [31].

Note que essa relação de dispersão foi obtida com a primeira aproximação em  $\theta^{\mu\alpha}$ . Comparando com a relação de dispersão (30) vemos que  $\theta^{\mu\alpha}$  cumpre um papel semelhante ao quadrivetor  $V^\mu$ . Portanto  $\theta^{\mu\alpha}$  cumpriria o papel de um campo de fundo também, deste modo modificando a equação de onda mas sem causar o efeito de birrefringência do vácuo.

## IX. CONCLUSÃO

Esta breve nota é fruto de um seminário apresentado na VII Escola de Física Roberto Salmeron (EFRAS). Ela reflete os exemplos apresentados de Simetrias e Violação de Simetrias para se estabelecer um cenário em que, de modo simplificado, o setor de calibre do MP foi estabelecido. O Mecanismo de Higgs foi apresentado para através de Violação Espontânea da Simetria de Calibre realizada por um campo escalar na supercondutividade. A possibilidade de um valor esperado no vácuo de natureza não escalar fornece a extensão do MP pela VESL. A Violação de simetria de Lorentz pode se dar de forma explícita pelas Teorias Não Comutativas, e apresentamos o elétron armadilhado num campo magnético no Efeito Hall Quântico como um exemplo de Teoria Não Comutativa. Em seguida apresentamos o eletromagnetismo modificado por ambas as teorias e para ressaltar as consequências destas duas visões através da equação de onda que se propaga no vácuo gerado por estas teorias. Tanto o campo de fundo  $V^\mu$ , como o tensor antissimétrico  $\theta^{\mu\alpha}$  mudam a relação de dispersão podendo alterar a velocidade limite estabelecida pela Relatividade Restrita. Este

cenário criado é até agora apenas um imaginário já que nos experimentos do LHC não foram observados sinais de tais Violações de Simetria de Lorentz. Portanto na escala de  $10^3 GeV$  a Simetria de Lorentz é preservada. Resta agora investigar da escala de  $10^3 GeV$  até a escala em que efeitos da Gravitação Quântica surgem  $10^{19} GeV$  se estas propriedades que provocam a VSL se manifestam.

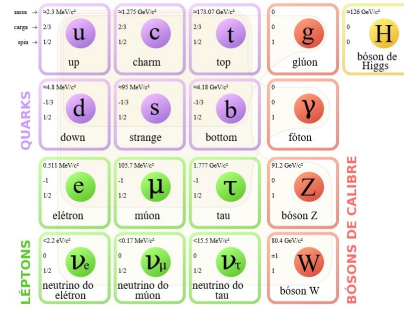


Figura 12: Modelo padrão

[1] Selected Papers of Abdus Salam: With Commentary, World Scientific Pub Co Inc (May 1, 1994).

[2] P. A. M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics (International Series of Monographs on Physics).

[3] C. N. Yang and R. Mills, Phys. Rev. **96**, 191 (1954)

[4] DIRAC, P. M. A. , The Collected Works of P. A. M. Dirac: Volume 1: 1924-1948;

[5] YUKAWA, H. On the interactions of elementary particles, Proc. Phys-Math. Soc. Japan, 17, P.48, 1935.

[6] SHAW, R. ; The problem of Particles Types and other contributions to the theory of Elementary Particles, PhD Thesis, 1955;

[7] YANG, C. N., LEE, T. D., Question of parity conservation on weak interactions, 1956, 104, 254-258; Parity non conservation and two components theory of the neutrino, 1957, Physical Review, 106, 1671-1675;

[8] WU, C.S., AMBLER, E., HAYWARD, R.W., HOPPEs, D.D. and HUDSON, R.P., , Phys. Rev, 105, 4, 1957;

[9] N. Nagaosa and S. Heusler, Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics (Theoretical and Mathematical Physics), (2010).

[10] A. Altland and B. D. Simon, *Condensed Matter Field Theory*, second edition, Cambridge University Press (2010).

[11] J. J. Sakurai , *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley (1994).

[12] Kerson Huang, *Fundamental Forces of Nature: The Story of Gauge Fields*, World Scientific, (2007).

[13] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, *Microscopic Theory of Superconductivity*, Phys. Rev. 106, 162 - 164 (1957).

[14] Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (1996).

[15] H. S. Snyder, *Phys.Rev* **71** 38-14 (1947).

[16] H. Belich, T. Costa-Soares, M. A. Santos and M. T. D. Orlando, Rev. Bras. Ens. Fís., **29**, 1, (2007).

[17] V. A. Kostelecký and S. Samuel, Phys. Rev. D **39**, 683 (1989).

[18] R. Jackiw, (1998), (Preprint arXiv:hep-ph/9811322).

[19] Victor O. Rivelles, J. Phys.: Conf. Ser. **287**, 012012 (2011).

[20] W. Heisenberg, Ann. Physick **32**, 20(1938).

[21] K. von Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper. Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980).

[22] Electronic Transport in Mesoscopic Systems, Supriyo Datta,Cambridge University Press (September 14, 1995).

[23] Quantum Hall Effects: Field Theoretical Approach and Related Topics (2nd Edition), Zyun Francis Ezawa , World Scientific Pub Co Inc; 2nd edition (January 1, 2008).

[24] T. Filk, Phys. Lett. B, **376**, 53–58 (1996).

[25] N. Seiberg and E. Witten, JHEP 9909, 032, (1999). (Preprint hep-th/9908142)

[26] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, Rev.Mod.Phys. **73** 977–1029 ( 2001).(Preprint hep-th/0106048)

[27] R. J. Szabo Phys.Rept. **378**, 207–299 (2003 ).(Preprint hep-th/0109162)

[28] E. Harikumar and V. O. Rivelles Phys.Lett. B, **625**, 156–164 (2005).(Preprint hep-th/0506078)

[29] K. Ajith, E. Harikumar, V. O. Rivelles and M. Sivakumar, Phys.Rev. D ,**77**, 085010 (2008).(Preprint 0801.2040)

[30] Z. Guralnik, R. Jackiw, S. Pi and A. Polychronakos Phys.Lett. B, **517**, 450–456 (2001).(Preprint hep-th/0106044)

[31] T. Mariz, J. Nascimento and V. O. Rivelles, Phys.Rev. D **75** 025020 (2007).(Preprint hep-th/0609132)