e-Boletim de Física
International Centre for Physics
Instituto de Física, Universidade de Brasília
Ano VII, Fevereiro de 2019 • http://periodicos.unb.br/ojs311/index.php/e-bfis/index • eBFIS **7** 7244-1(2019)

Introdução à Teoria de Gauge da Gravitação

Wytler Cordeiro dos Santos*
Universidade de Brasília, CEP 70910-900, DF, Brasil

As interações fundamentais da natureza, a eletrofraca e a cromodinâmica, são descritas no Modela Padrão pela Teoria de Gauge através de simetrias internas que mantêm a invariância do funcional ação. A interação fundamental da gravitação é muito bem descrita pela Relatividade Geral de Einstein em um espaço-tempo métrico Riemanniano, porém a Relatividade Geral tem sido ao longo do tempo uma teoria de campo gravitacional à parte do Modelo Padrão. A Teoria de Gauge permite através de simetrias do grupo de Poincaré impor invariâncias no funcional da ação do campo de espinores que resultam na interação gravitacional com os férmions. Nessa abordagem o campo gravitacional além de ser descrito pela equação similar a da Relatividade Geral, também trás uma interação spin-gravitacional em um espaço-tempo de Riemann-Cartan.

I. INTRODUÇÃO

Na Mecânica Clássica a partir do formalismo Lagrangiano é possível compreender as leis fundamentais da Física. O **funcional ação** produz equações de movimento e através das invariâncias do funcional ação é possível obter as quantidades conservadas do movimento como por exemplo a energia e o momento por invariância por translação e o momento angular por invariância por rotações [1]. A partir desses belos conceitos da Mecânica Clássica, principalmente Dirac e Feynman, mostraram que o formalismo de Lagrange e da ação adquirem uma grande e completa importância na **Teoria Clássica de Campos** [2]. O funcional ação para um campo é matematicamente descrito por

$$S(t_1, t_2, [\Phi]) \equiv \int_{t_1}^{t_2} d^4\mathrm{x}\, \mathcal{L}(\Phi, \partial_\alpha \Phi), \tag{1}$$

onde $d^4\mathrm{x} = dt\, dx\, dy\, dz$ é uma medida quadridimensional do espaço-tempo de Minkowski. O integrando $\mathcal{L}$ é a densidade Lagrangiana da função dos campos e de suas derivadas limitadas pela condição de invariância de translação. Os campos ou coleções de campos Φ podem ser campos escalares, espinoriais, vetoriais, etc. O **princípio da ação mínima** resulta nas equações de movimento de Euler-Lagrange,

$$\partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \Phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = 0, \tag{2}$$

que produzem (i) a equação de Klein-Gordon para o campo escalar de sipn zero; (ii) a equação de Dirac para o campo espinorial de spin $\frac{1}{2}$; (iii) as equações de Maxwell para o campo vetorial para o eletromagnetismo de spin 1; e assim por diante.

Na Teoria Clássica de Campos, o formalismo Lagrangiano nos mostra como obter as quantidades físicas que são conservadas, isto é, de observáveis que são independentes do tempo. A descrição matemática que associa uma dada invariância a uma lei de conservação é o **Teorema de Noether**: Se o funcional ação é invariante sob um grupo contínuo de transformações dos campos, então o correspondente Lagrangiano fixa um conjunto de invariâncinantes dinâmicos, isto é, as correntes conservadas.

Se considerarmos um grupo contínuo de translação nas coordenadas do espaço-tempo,

$$x'^\alpha = x^\alpha + a^\alpha\,, \tag{3}$$

em uma determinada ação de campo relativístico, teremos como consequência do teorema de Noether a conservação da energia e momento dado pela expressão:

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0, \tag{4}$$

onde $T^{\alpha\beta}$ é o tensor **energia-momento**. Inicialmente através do teorema de Noether e a partir do Lagrangiano, o que obtemos é o denominado tensor energia-momento canônico dado por:

$$T^{(C)\alpha}{}_\beta = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \Phi)} \right) (\partial_\beta \Phi) - \delta^\alpha{}_\beta \mathcal{L}. \tag{5}$$

Para o campo escalar de spin zero o tensor energia-momento canônico é simétrico. Como o spin do campo escalar é zero não existem contirbuições de energia devido ao momento angular ao tensor energia-momento. No entanto para os campos espinoriais e vetoriais o tensor

* wytler@fis.unb.br

energia-momento canônico obtido por (5) não é simétrico. Os campos espinoriais e vetoriais dão contibuições de energia devido ao momento angular intrínseco. O formalismo matemático que conserta essa falta de simetria é a teoria de Belifante-Rosenfeld. Esse formalismo leva em consideração o momento angular dos campos espinoriais e vetoriais,

$$T_{\alpha\beta} = T^{(C)}_{\alpha\beta} - \frac{i}{2}\partial^{\gamma} B_{\alpha\beta\gamma}, \tag{6}$$

onde o tensor $B_{\alpha\beta\gamma}$ é dado por:

$$B_{\alpha\beta\gamma} = S_{\alpha\beta\gamma} + S_{\gamma\alpha\beta} - S_{\beta\gamma\alpha}. \tag{7}$$

O tensor $S_{\alpha\beta\gamma}$ é a densidade de corrente de spin contida no campo Φ. No formalismo de Belifante-Rosenfeld esse tensor $S_{\alpha\beta\gamma}$ é dado em termos das transformações de Lorentz para o campo Φ,

$$S^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\alpha}\Phi)} \Sigma_{\beta\gamma}\, \Phi, \tag{8}$$

aqui os termos $\Sigma_{\beta\gamma}$ são os geradores das transformações de Lorentz, de rotações e boosts, de forma que o campo se transforma covariantemente de acordo com as invariâncias de Lorentz,

$$\Phi'(x') = \exp\left[\frac{i}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}\right]\Phi(x), \tag{9}$$

e que obedecem a álgebra de Lie:

$$i[\Sigma_{\gamma\delta}, \Sigma_{\alpha\beta}] = g_{\alpha\delta}\Sigma_{\gamma\beta} - g_{\alpha\gamma}\Sigma_{\delta\beta} + g_{\beta\delta}\Sigma_{\alpha\gamma} - g_{\beta\gamma}\Sigma_{\alpha\delta}. \tag{10}$$

A teoria de campo para a gravitação é muito bem descrita pela Teoria da Relavidade Geral como uma descrição de um espaço-tempo riemanniana $(\mathcal{M}, \boldsymbol{g})$ com curvatura satisfazendo as equações de campo de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G\, T_{\mu\nu}, \tag{11}$$

é caracterizado pelo tensor energia momento $T_{\mu\nu}$, que acomoda entre suas componentes a densidade de energia e a densidade de momento associados a um sistema físico que pode curvar o espaço-tempo. Do teorema de Noether, $T_{\mu\nu}$ deve satisfazer a equação de conservação,

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \tag{12}$$

Nesse trabalho vamos usar as letras gregas: α, β, γ, $\delta, \cdots$ para os índices de tensores, vetores, etc em coordenadas no espaço-tempo de Minkowski com tensor métrico $\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Ao passo que as letras gregas κ, λ, μ, $\nu, \cdots$ para os índices de tensores, vetores, etc no espaço-tempo curvo, também denomidado de índices holonômicos ou coordenados. Em inglês também usam o termo *world indices*.

Como sabemos a teoria da Relatividade Geral descreve as trajetórias de partículas massivas e até mesmo os fótons ao redor das grandes concentrações de massas como planetas, estrelas, galáxias, etc. É razoável ver a teoria da Relatividade Geral como um limite macroscópico de uma ainda desconhecida teoria quântica da gravitação. Élie Cartan foi quem deu um primeiro passo na direção de uma possível teoria microscópica da gravitação ao mostrar que torção no espaço-tempo poderia ser proveniente do spin da matéria [3]. A construção inicial para uma teoria da gravitação envolvendo spin e torção foi iniciada por Utiyama [4], e aprimorada com Kibble [5] e Sciama [6] que levaram à formulação da teoria de Einstein-Cartan-Kibble-Sciama (ECKS) da gravitação, ou teoria U_4 da gravitação [3, 7–10]. Essa teoria da gravitação ECKS é descrita no espaço-tempo denominado de espaço de Riemann-Cartan, onde a torção é parte integrante da conexão afim. Nessa teoria o tensor energia-momento se acopla a curvatura do espaço-tempo da mesma forma que na Relatividade Geral como visto na equação (11), e também produz uma outra equação que acopla o tensor de densidade de corrente de spin com a torção no espaço-tempo de Riemann-Cartan. Por acoplar energia-momento e spin da matéria à metrica e à torção e por tratá-los como variáveis independentes a teoria ECKS se torna uma extensão da Relatividade Geral. As predições da teoria ECKS são absolutamentes indistinguíveis da teoria da Relatividade Geral mesmo para altíssimas densidades de matéria, ocorrendo rupturas entre as duas teorias unicamente em densidades ultra altas. Nesses ambientes extremos, de ultra densidades, o acoplamento entre spin e torção poderia em princípio produzir uma repulsão gravitacional que impediria a formação de singularidades [11]. Na seção II veremos as definições dos tensores de torção e contorção. Na seção III veremos as principais consequências da torção na definição do tensor de curvatura, a identidade de Palatini no espaço-tempo com torção, a ação de Einstein-Cartan e as duas equações de campo de Einstein-Cartan. Na seção IV fazemos uma breve revisão e discussão sobre o campo espinorial, os blocos fundamentais da matéria no espaço-tempo plano. Pelo teorema de Noether, o tensor energia-momento é não simétrico sendo necessário aplicar o mecanismo de Belifante-Rosenfeld que adiciona ao tensor energia-momento canônico a contribuição da densidade de corrente de spin, simetrizando-o. Na seção V expomos os cálculos detalhados para a Teoria de Gauge da Gravitação com o objetivo de construir a derivada covariante para a ação espinorial. E finalmente na seção VI mostramos como são obtidos os tensores energia-momento e densidade de corrente de spin a partir da ação espinorial no espaço-tempo curvo. A partir desses dois tensores obtem-se as duas equações de Einstein-Cartan.

II. ESPAÇO-TEMPO DE RIEMANN-CARTAN

Antes de descrevermos as equações de campo gravitacional em um espaço-tempo que envolva curvatura e ao mesmo tempo a torção, vamos analisar em que condições é definido o tensor de torção. O ponto de partida para isso é consideramos que o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ de um determinado espaço-tempo tenha a derivada covariante nula,

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} \equiv 0. \tag{13}$$

A derivada covariante no espaço-tempo de Riemann-Cartan, tem a mesma definição e forma que a derivada covariante no espaço Riemanniano,

$$\nabla_\mu A^\nu = \partial_\mu A^\nu + \Gamma^\nu{}_{\mu\kappa} A^\kappa, \tag{14}$$

onde os termos $\Gamma^\nu{}_{\mu\kappa}$ são as conexões métricas [12]. No espaço-tempo Riemanniano as conexões são simétricas nos índices μ e κ, ao passo que no espaço-tempo de Riemann-Cartan as conexões não são simétricas. É importante denotar aqui que o índice μ no operador ∇ da derivada covariante na equação acima (14) aparece na segunda posição do coeficiente de conexão Γ, ao passo que algumas referências esse índice aparece na terceira posição.

Com a condição da derivada covariante do tensor métrico ser nula (13), podemos analisar da mesma forma que se faz no espaço Riemanniano um conjunto de três equações vistas abaixo,

$$\begin{cases} \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa{}_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} - \Gamma^\kappa{}_{\lambda\nu} g_{\kappa\mu} = 0 \\ \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} g_{\kappa\lambda} - \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda} g_{\kappa\nu} = 0 \\ \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda} g_{\kappa\mu} - \Gamma^\kappa{}_{\nu\mu} g_{\kappa\lambda} = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Podemos realisar a seguinte operação com o sistema de equações acima,

$$-\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \left(\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} + \Gamma^\kappa{}_{\nu\mu}\right) g_{\kappa\lambda} + \left(\Gamma^\kappa{}_{\lambda\mu} - \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}\right) g_{\kappa\nu} + \left(\Gamma^\kappa{}_{\lambda\nu} - \Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda}\right) g_{\kappa\mu} = 0. \tag{16}$$

Os dois termos entre parêntesis que são subtração, são definidos como **tensores de torção**,

$$\mathsf{T}^\kappa{}_{\lambda\mu} = \left(\Gamma^\kappa{}_{\lambda\mu} - \Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}\right). \tag{17}$$

No espaço-tempo Riemanniano devido a simetria nos índices λ e μ anulam o tensor de torção. Então com a definição acima a equação (16), se torna,

$$-\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} + \mathsf{T}^\kappa{}_{\lambda\mu} g_{\kappa\nu} + \mathsf{T}^\kappa{}_{\lambda\nu} g_{\kappa\mu} - \left(\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} + \Gamma^\kappa{}_{\nu\mu}\right) g_{\kappa\lambda} = 0,$$

ou ainda,

$$\mathsf{T}_{\mu\lambda\nu} + \mathsf{T}_{\nu\lambda\mu} + \left(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\right) = \left(\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} + \Gamma^\kappa{}_{\nu\mu}\right) g_{\kappa\lambda}.$$

resultando em:

$$\Gamma^\rho{}_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\mathsf{T}_{\mu\lambda\nu} + \mathsf{T}_{\nu\lambda\mu}\right), \tag{18}$$

onde usamos a identidade $\frac{1}{2}(A_\mu B\nu + A_\nu B_\mu) = A_{(\mu} B_{\nu)}$. Observe que o primeiro termo do lado direito da equação acima é o símbolo de Christoffel, dado por:

$$\begin{Bmatrix} \rho \\ \mu\nu \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\right). \tag{19}$$

Observando que os símbolos de Christoffel são simétricos nos índices μ e ν, e que o tensor de torção (17) é antissimétrico nos mesmos índices, podemos inferir que a conexão $\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}$ deve ser composta de partes simétrica e antissimétrica,

$$\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} = \Gamma^\rho{}_{(\mu\nu)} + \Gamma^\rho{}_{[\mu\nu]},$$

onde a antissimetria do tensor é dado pelo anticomutador $\Gamma^\rho{}_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(\Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu})$, de forma que temos da equação acima a relação,

$$\Gamma^\rho{}_{(\mu\nu)} = \Gamma^\rho{}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathsf{T}^\rho{}_{\mu\nu},$$

de forma que substituindo essa relação acima e o símbolo de Christoffel (19) na equação (18) obeteremos,

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\mathsf{T}_{\mu\lambda\nu} + \mathsf{T}_{\nu\lambda\mu} + \mathsf{T}_{\lambda\mu\nu} \right) \tag{20}$$

ou simplesmente

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + K^{\rho}{}_{\mu\nu} \tag{21}$$

onde definimos o tensor de contorção como,

$$K^{\rho}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\mathsf{T}_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu} + \mathsf{T}_{\nu}{}^{\rho}{}_{\mu} + \mathsf{T}^{\rho}{}_{\mu\nu} \right). \tag{22}$$

Vamos definir o vetor de torção como uma contração do tensor (17) da seguinte maneira,

$$\mathsf{T}_{\mu} = \mathsf{T}^{\nu}{}_{\mu\nu} \tag{23}$$

e devido a antissimetria nos índices μ e ν do tensor de tensor (17) também vale $\mathsf{T}_{\mu} = -\mathsf{T}^{\rho}{}_{\rho\mu}$. Também é possível obter a partir do tensor de contração,

$$K_{\rho}{}^{\mu}{}_{\mu} = \frac{1}{2} \left(\mathsf{T}_{\mu\rho}{}^{\mu} + \mathsf{T}^{\mu}{}_{\rho\mu} + \mathsf{T}_{\rho}{}^{\mu}{}_{\mu} \right) = \frac{1}{2} \left(\mathsf{T}^{\mu}{}_{\rho\mu} + \mathsf{T}^{\mu}{}_{\rho\mu} + 0 \right) = \mathsf{T}_{\rho}. \tag{24}$$

Devido a antissimetria verifica-se que $K^{\mu}{}_{\mu\nu} = -\mathsf{T}_{\nu}$ e que $K^{\rho}{}_{\mu\rho} = 0$.

A. Comutador de derivadas covariantes

Na geometria Riemanniana obtemos o tensor de curvatura ou tensor de Riemann quando realizamos o cálculo do comutador das derivadas covariantes. Vejamos a seguir o que obteremos realizando o cálculo de comutadores levando em conta que as conexões no espaço-tempo de Riemann Cartan são compostas de parte simétrica e antissimétrica,

$$\begin{aligned}
[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] A^{\rho} &= \nabla_{\mu}\nabla_{\nu} A^{\rho} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu} A^{\rho} \\
&= \partial_{\mu}\partial_{\nu} A^{\rho} + (\partial_{\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma}) A^{\sigma} + \Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma}\partial_{\mu} A^{\sigma} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}\partial_{\nu} A^{\lambda} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma} A^{\sigma} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\partial_{\lambda} A^{\rho} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\sigma} A^{\sigma} \\
&- \partial_{\nu}\partial_{\mu} A^{\rho} - (\partial_{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma}) A^{\sigma} - \Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma}\partial_{\nu} A^{\sigma} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}\partial_{\mu} A^{\lambda} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma} A^{\sigma} + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\partial_{\lambda} A^{\rho} + \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\sigma} A^{\sigma} \\
&= \left(\partial_{\mu}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\sigma} \right) A^{\sigma} - \left(\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\nu\mu} \right) \left(\partial_{\lambda} A^{\rho} + \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\sigma} A^{\sigma} \right),
\end{aligned}$$

resultando em,

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] A^{\rho} = R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} A^{\sigma} - \mathsf{T}^{\lambda}{}_{\mu\nu} \nabla_{\lambda} A^{\rho}. \tag{25}$$

Observe que se o espaço-tempo não tem torção, $\mathsf{T}^{\lambda}{}_{\mu\nu} = 0$, o comutador acima se reduz ao comutador do espaço Riemanniano.

III. A AÇÃO DE EINSTEIN-CARTAN

Vimos na seção anterior que o tensor de curvatura no espaço-tempo de Riemann-Cartan tem o mesmo formato algébrico que o tensor de curvatura no espaço-tempo de Riemann, com o detalhe que as conexões no espaço-tempo de Riemann-Cartan tem componentes simétrica e componentes antissimétricas,

$$R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} = \partial_{\mu}\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\lambda} - \partial_{\nu}\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}. \tag{26}$$

Uma variação infinitesimal no tensor de curvatura resulta em,

$$\delta R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} = \delta \left(\partial_{\mu}\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\lambda} \right) - \delta \left(\partial_{\nu}\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda} \right) + \delta \left(\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\rho} \right) \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda} + \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\rho}\, \delta\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda} - \delta \left(\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\rho} \right) \Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\rho}\, \delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}, \tag{27}$$

com a condição

$$\delta \left(\partial_{\mu}\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\lambda} \right) = \partial_{\mu}\, \delta\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\lambda},$$

obtemos então que uma variação infinitesimal no tensor de curvatura resulta em,

$$\delta R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} = \partial_{\mu}\, \delta\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\lambda} - \partial_{\nu}\, \delta\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda} + \delta \left(\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\rho} \right) \Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda} + \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\rho}\, \delta\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda} - \delta \left(\Gamma^{\kappa}{}_{\nu\rho} \right) \Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\rho}\, \delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda}, \tag{28}$$

Com essa equação em mente vamos descrever a seguir a famosa identidade de Palatini nesse contexto do espaço-tempo de Riemann-Cartan dada por,

$$\nabla_\mu\left(\delta\Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda}\right)-\nabla_\nu\left(\delta\Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}\right)=\partial_\mu\,\delta\Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda}+\Gamma^\kappa{}_{\mu\rho}\delta\Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}-\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}\delta\Gamma^\kappa{}_{\rho\lambda}-\Gamma^\rho{}_{\mu\lambda}\delta\Gamma^\kappa{}_{\nu\rho}$$
$$-\left[\partial_\nu\,\delta\Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}+\Gamma^\kappa{}_{\nu\rho}\delta\Gamma^\rho{}_{\mu\lambda}-\Gamma^\rho{}_{\nu\mu}\delta\Gamma^\kappa{}_{\rho\lambda}-\Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}\delta\Gamma^\kappa{}_{\mu\rho}\right], \tag{29}$$

então comparando a equação acima (29) com a equação antecedente (28), obtemos que

$$\nabla_\mu\left(\delta\Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda}\right)-\nabla_\nu\left(\delta\Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}\right)=\delta R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}-\left(\Gamma^\rho{}_{\mu\nu}-\Gamma^\rho{}_{\nu\mu}\right)\delta\Gamma^\kappa{}_{\rho\lambda},$$

que pela definição do tensor de torção (17), obtemos a identidade de Palatini no espaço-tempo de Riemann-Cartan,

$$\delta R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}=\nabla_\mu\left(\delta\Gamma^\kappa{}_{\nu\lambda}\right)-\nabla_\nu\left(\delta\Gamma^\kappa{}_{\mu\lambda}\right)+\mathsf{T}^\rho{}_{\mu\nu}\delta\Gamma^\kappa{}_{\rho\lambda}. \tag{30}$$

Para a construção da ação de campo gravitacional necessitamos do tensor de Ricci $R^\mu{}_{\lambda\mu\nu}=R_{\lambda\nu}$, cujo a variação infinitesimal é dada pela equação abaixo,

$$\delta R_{\lambda\nu}=\nabla_\mu\left(\delta\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\right)-\nabla_\nu\left(\delta\Gamma^\mu{}_{\mu\lambda}\right)+\mathsf{T}^\rho{}_{\mu\nu}\delta\Gamma^\mu{}_{\rho\lambda}. \tag{31}$$

Agora é possível descrevermos a ação de campo gravitacional no espaço-tempo de Cartan. A ação é algebricamente semelhante a ação de Einstein-Hilbert na Relavidade Geral. No espaço-tempo com torção essa ação é denominada de **ação de Einstein-Cartan** dada pela expressão abaixo,

$$S_{EC}=\frac{1}{16\pi G}\int_\Omega d^4x\sqrt{-g}\,R, \tag{32}$$

onde $R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ é o escalar de curvatura. Da mesma forma que na Relatividade Geral, as equações de campo são obtidas a partir da variação da ação,

$$\delta S_{EC}=\frac{1}{16\pi G}\int_\Omega d^4x\left[\left(\delta\sqrt{-g}\right)\,R+\sqrt{-g}\left(\delta R_{\mu\nu}\right)g^{\mu\nu}+\sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right].$$

Podemos substituir na equação acima $\delta\sqrt{-g}=-\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$ e também a identidade (31) para obtermos,

$$\delta S_{EC}=\frac{1}{16\pi G}\int_\Omega d^4x\Bigg\{-\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\,R\delta g^{\mu\nu}+\sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}+\sqrt{-g}\left[\nabla_\lambda\left(\delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}\right)-\nabla_\nu\left(\delta\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu}\right)+\mathsf{T}^\rho{}_{\kappa\nu}\delta\Gamma^\kappa{}_{\rho\mu}\right]g^{\mu\nu}\Bigg\}.$$

Da condição de covariância do tensor métrico (13) podemos obter,

$$\delta S_{EC}=\frac{1}{16\pi G}\int_\Omega d^4x\sqrt{-g}\left[R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\,R\right]\delta g^{\mu\nu}+\frac{1}{16\pi G}\int_\Omega d^4x\sqrt{-g}\left[\nabla_\lambda\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}\right)-\nabla_\nu\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu}\right)+\mathsf{T}^\rho{}_\kappa{}^\mu\delta\Gamma^\kappa{}_{\rho\mu}\right]. \tag{33}$$

Já podemos identificar o tensor de Einstein, $G_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\,R$, na primeira integral da equação acima. Os dois termos na segunda parte, $\nabla_\lambda\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}\right)-\nabla_\nu\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu}\right)$ são divergentes, $\nabla_\mu V^\mu$. Vamos ver com alguns detalhes como deve-se tratar esses dois termos divergentes no espaço-tempo com torção. Primeiramente vemos que,

$$\nabla_\mu V^\mu=\partial_\mu V^\mu+\Gamma^\mu{}_{\mu\lambda}V^\lambda,$$

ou então,

$$\nabla_\mu V^\mu=\partial_\mu V^\mu+\left\{{\mu \atop \mu\lambda}\right\}V^\lambda+K^\mu{}_{\mu\lambda}V^\lambda,$$

onde podemos usar a identidade $K^\mu{}_{\mu\lambda}=-\mathsf{T}_\lambda$, bem como a identidade dos símbolos de Christoffel,

$$\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} = \frac{\partial_\lambda \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}},$$

de froma que obtemos para a divergência do vetor V^μ a seguinte equação,

$$\nabla_\mu V^\mu = \partial_\mu V^\mu + \frac{\partial_\mu \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} V^\mu - \mathsf{T}_\mu V^\mu. \qquad (34)$$

Se realizarmos a integral dessa divergência na região Ω,

$$\int_\Omega d^4x \sqrt{-g}\, \nabla_\mu V^\mu = \int_\Omega d^4x \partial_\mu \left(\sqrt{-g}\, V^\mu \right) - \int_\Omega d^4x \sqrt{-g}\, \mathsf{T}_\mu V^\mu, \qquad (35)$$

onde podemos utilizar o teorema da divergência de Gauss, de forma que a integral pode ser reescrita como,

$$\int_\Omega d^4x \sqrt{-g}\, \nabla_\mu V^\mu = \oint_{\partial\Omega} d^3x \sqrt{-g}\, V^\mu \hat{n}_\mu - \int_\Omega d^4x \sqrt{-g}\, \mathsf{T}_\mu V^\mu. \qquad (36)$$

Na Teoria Clássica de Campos, o termo de superfície $\partial\Omega$ deve se cancelar devido a finitude dos campos, então temos como resultado dessa integral o valor:

$$\int_\Omega d^4x \sqrt{-g}\, \nabla_\mu V^\mu = - \int_\Omega d^4x \sqrt{-g}\, \mathsf{T}_\mu V^\mu. \qquad (37)$$

Devemos observar que se estivéssemos tratando de um espaço-tempo livre de torção a segunda integral do lado direito da equação (33) se anularia e obteríamos as equação de campo gravitacional da Relavidade Geral apenas. Voltando o resultado obtido na equação (37) na variação da ação da equação (33), obtemos então,

$$\delta S_{EC} = \frac{1}{16\pi G} \int_\Omega d^4x \sqrt{-g}\; G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{16\pi G} \int_\Omega d^4x \sqrt{-g} \left[-\mathsf{T}_\lambda \left(g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} \right) + \mathsf{T}_\nu \left(g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} \right) + \mathsf{T}^\lambda{}_\mu{}^\nu \delta \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} \right]. \qquad (38)$$

Antes de seguirmos em frente vamos utilizar uma identidade matemática do tensor métrico que pode ser vista abaixo como,

$$\delta g^{\mu\nu} = - g^{\mu\kappa} g^{\nu\lambda} \delta g_{\lambda\kappa}, \qquad (39)$$

e substituindo essa igualdade na variação da ação (38) obtemos,

$$\delta S_{EC} = -\frac{1}{16\pi G} \int_\Omega d^4x \sqrt{-g}\; G^{\kappa\lambda} \delta g_{\kappa\lambda} + \frac{1}{16\pi G} \int_\Omega d^4x \sqrt{-g} \left[-\mathsf{T}_\lambda \left(g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} \right) + \mathsf{T}_\nu \left(g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda{}_{\lambda\mu} \right) + \mathsf{T}^\lambda{}_\mu{}^\nu \delta \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} \right]. \qquad (40)$$

Então finalmente chegamos ao ponto em que é possível obter duas equações de campo a partir do funcional de ação acima. A primeira é a variação da ação em relação ao tensor métrico, que resulta na tradicional equação de campo gravitacional da Relatividade Geral,

$$\frac{\delta S_{EC}}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{16\pi G} G^{\mu\nu} = -\frac{1}{16\pi G} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right). \qquad (41)$$

A segunda variação é em relação ao campo de conexões que é visto a seguir,

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{EC}}{\delta \Gamma^\rho{}_{\sigma\tau}} &= \frac{1}{16\pi G} \left(\mathsf{T}^\lambda{}_\mu{}^\nu \delta_\rho{}^\mu \delta_\lambda{}^\sigma \delta_\nu{}^\tau + \mathsf{T}_\nu g^{\mu\nu} \delta_\rho{}^\lambda \delta_\lambda{}^\sigma \delta_\mu{}^\tau - \mathsf{T}_\lambda g^{\mu\nu} \delta_\rho{}^\lambda \delta_\nu{}^\sigma \delta_\mu{}^\tau \right) \\ &= \frac{1}{16\pi G} \left(\mathsf{T}^\sigma{}_\rho{}^\tau + \mathsf{T}_\nu g^{\tau\nu} \delta_\rho{}^\sigma - \mathsf{T}_\rho g^{\tau\sigma} \right) \end{aligned}$$

ou então,

$$\frac{\delta S_{EC}}{\delta \Gamma^{\rho\sigma\tau}} = \frac{1}{16\pi G} \left(\mathsf{T}_{\sigma\rho\tau} + \mathsf{T}_\tau g_{\rho\sigma} - \mathsf{T}_\rho g_{\tau\sigma} \right) \qquad (42)$$

Agora considere a presença de um campo de matéria no espaço-tempo de Riemann-Cartan onde a ação total de um determinado sistema é dada por

$$S = S_{EC} + S_M, \tag{43}$$

onde S_M é uma ação de algum campo de matéria dada por:

$$S_M = \int d^4x \, \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \tag{44}$$

onde $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ é uma Lagrangiana de algum campo. Desta forma, uma variação na ação resulta em:

$$\delta S_{EC} + \delta S_M = 0, \tag{45}$$

e como

$$\frac{\delta S_{EC}}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g}\, G^{\mu\nu}$$

então,

$$-\frac{\sqrt{-g}}{16\pi G}G^{\mu\nu} + \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} = 0$$

ou então,

$$G^{\mu\nu} = \frac{16\pi G}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}}. \tag{46}$$

Então pode-se calcular o tensor energia-momento a partir da ação de um campo de matéria, para que essa resulte na equação de campo de Einstein,

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}}. \tag{47}$$

O tensor energia-momento calculado pela equação acima é denominado tensor-energia momento métrico ou tensor energia-momento de Hilbert. Para uma ação S_M de campo escalar e também para o campo eletromagnético o cálculo acima resulta diretamente em um tensor energia-momento simétrico. Porém para um campo espinorial o tensor energia-momento calculado pela equação (47) não será simétrico, sendo necessário utilizar o mecanismo de Belinfante [14]. Na próxima seção mostraremos os cálculos desse tensor no espaço-tempo plano da Relatividade Especial e posteriormente mostraremos como calcular esse tensor no espaço-tempo curvo.

Vejamos agora o resultado que obtemos se a variação da ação for em relação ao campo de conexões dado pela equação (42), termos que,

$$\frac{\delta S_{EC}}{\delta \Gamma^{\lambda\mu\nu}} + \frac{\delta S_M}{\delta \Gamma^{\lambda\mu\nu}} = 0,$$

resultando em

$$\mathsf{T}_{\mu\lambda\nu} + \mathsf{T}_{\nu} g_{\lambda\mu} - \mathsf{T}_{\lambda} g_{\mu\nu} = 8\pi G \,\mathfrak{S}_{\mu\lambda\nu}, \tag{48}$$

onde

$$\mathfrak{S}_{\mu\lambda\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta \Gamma^{\lambda\mu\nu}} \tag{49}$$

é a densidade de corrente de spin do campo de matéria. O tensor energia-momento é a fonte da curvatura no espaço-tempo ao passo que o tensor de densidade de corrente de spin é a fonte de torção no espaço-tempo. Veremos isso com mais detalhes nas próximas seções.

IV. CAMPO ESPINORIAL

Os componentes básicos da matéria são os férmions e a teoria de gauge para a gravitação deve ser construída a partir dos campos de matéria fermiônicos de spin $\frac{1}{2}$. O funcional ação tem Lagrangiano dado por:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^\alpha\partial_\alpha\psi - (\partial_\alpha\bar{\psi})\gamma^\alpha\psi\right) + m\bar{\psi}\psi. \tag{50}$$

Onde as matrizes γ^α obedecem a algebra de Clifford:

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = \gamma^\alpha\gamma^\beta + \gamma^\beta\gamma^\alpha = 2\eta^{\alpha\beta}\mathbb{1}. \tag{51}$$

sendo $\mathbb{1}$ a matriz identidade 4×4. O campo fermiônico ψ é um espinor coluna de quatro componentes, cujo espinor adjunto é dado por $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$.

As equações de Euler-Lagrange para o Lagrangiano espinorial acima são as duas equações abaixo

$$\partial_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\bar{\psi})}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} = 0. \tag{52}$$

e

$$\partial_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\psi)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = 0. \tag{53}$$

que resultam nas duas equaçõe de Dirac:

$$(i\gamma^\alpha\partial_\alpha + m\mathbb{1})\psi = 0 \tag{54}$$

e

$$-i\partial_\alpha\bar{\psi}\gamma^\alpha + m\bar{\psi} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \bar{\psi}(-i\overleftarrow{\partial}_\alpha\gamma^\alpha + m\mathbb{1}) = 0. \tag{55}$$

O teorema de Noether nos mostra que o tensor energia-momento canônico será dado por:

$$T^{(C)\alpha}{}_{\beta} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\psi)}(\partial_\beta\psi) + \partial_\beta\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\bar{\psi})} - \delta^\alpha{}_\beta\mathcal{L}, \tag{56}$$

que resulta em:

$$T^{(C)}_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma_\alpha\partial_\beta\psi - \frac{i}{2}(\partial_\beta\bar{\psi})\gamma_\alpha\psi. \tag{57}$$

Devemos observar aqui que o tensor energia-momento canônico obtido através do teorema de Noether não está simetrizado. Sendo então necessário utilizar os procedimentos de Belinfante-Rosenfeld discutido didaticamente por Weinberg na referência [15]. A metodologia de Belinfante-Rosenfeld consiste em calcular a densidade de energia contida na densidade de spin. Essa metodologia resume-se em calcular a seguinte equação,

$$\mathfrak{T}_{\alpha\beta} = T^{(C)}_{\alpha\beta} - \frac{i}{2}\partial^\delta B_{\alpha\beta\delta}, \tag{58}$$

ou ainda

$$\mathfrak{T}_{\alpha\beta} = T^{(C)}_{\alpha\beta} - \frac{i}{2}\partial^\delta (S_{\alpha\beta\delta} + S_{\delta\alpha\beta} - S_{\beta\delta\alpha}), \tag{59}$$

onde o tensor $B_{\alpha\beta\delta}$ é dado por:

$$B_{\alpha\beta\delta} = S_{\alpha\beta\delta} + S_{\delta\alpha\beta} - S_{\beta\delta\alpha}. \tag{60}$$

O tensor $S_{\alpha\beta\delta}$ é a densidade de spin contida no campo fermiônico que de acordo coma Teoria Clássica de Campos é dado por:

$$S^\alpha{}_{\beta\delta} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\psi)}\Sigma_{\beta\delta}\,\psi + \bar{\psi}(-\Sigma_{\beta\delta})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\bar{\psi})}, \tag{61}$$

reafirmando que o espinor adjunto $\bar{\psi}$ se transforma com sinal trocado em relação a ψ, por isso o sinal negativo no gerador das transformações $\Sigma_{\beta\delta}$ de Lorentz para o campo espinorial. Realizando esse cálculo obtemos que:

$$S^\alpha{}_{\beta\delta} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\alpha\Sigma_{\beta\delta}\psi - \bar{\psi}\Sigma_{\beta\delta}\left(\frac{-i}{2}\right)\gamma^\alpha\psi = \frac{i}{2}\bar{\psi}\left(\gamma^\alpha\Sigma_{\beta\delta} + \Sigma_{\beta\delta}\gamma^\alpha\right)\psi \tag{62}$$

ou então em termos de anticomutador,

$$S_{\alpha\beta\delta} = \frac{i}{2}\,\bar{\psi}\left\{\gamma_\alpha, \Sigma_{\beta\delta}\right\}\psi. \tag{63}$$

Agora podemos calcular o tensor $B_{\alpha\beta\delta}$ na equação (60), onde temos

$$B_{\alpha\beta\delta} = S_{\alpha\beta\delta} + S_{\delta\alpha\beta} - S_{\beta\delta\alpha} = \frac{i}{2}\,\bar{\psi}\left(\left\{\gamma_\alpha, \Sigma_{\beta\delta}\right\} + \left\{\gamma_\delta, \Sigma_{\alpha\beta}\right\} - \left\{\gamma_\beta, \Sigma_{\delta\alpha}\right\}\right)\psi. \tag{64}$$

Podemos agora simplificar a expressão acima utilizando a definição dos geradores de transformações de Lorentz,

$$\Sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{4}\left[\gamma_\alpha, \gamma_\beta\right], \tag{65}$$

também a identidade (51), onde $\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2\eta^{\alpha\beta}\mathbb{1}$ em conjunto com a identidade:

$$\{A, [B, C]\} - \{B, [C, A]\} = [\{A, B\}, C] \tag{66}$$

de forma que os dois últimos anticomutadores na expressão (64) será dado por:

$$\{\gamma_\beta, \Sigma_{\delta\alpha}\} - \{\gamma_\delta, \Sigma_{\alpha\beta}\} = \frac{i}{4}\left\{\gamma_\beta, [\gamma_\delta, \gamma_\alpha]\right\} - \frac{i}{4}\left\{\gamma_\delta, [\gamma_\alpha, \gamma_\beta]\right\} = \frac{i}{4}\left[\left\{\gamma_\beta, \gamma_\delta\right\}, \gamma_\alpha\right] = \frac{i}{4}\left[2\eta_{\beta\delta}\mathbb{1}, \gamma_\alpha\right] = 0. \tag{67}$$

Então o tensor da equação (64) resulta em,

$$B_{\alpha\beta\delta} = \frac{i}{2}\,\bar{\psi}\left\{\gamma_\alpha, \Sigma_{\beta\delta}\right\}\psi. \tag{68}$$

Para finalizarmos o cálculo do tensor energia-momento de Belifante-Rosenfeld na equação (58), vamos calcular a derivada do tensor acima,

$$\partial^\delta B_{\alpha\beta\delta} = \frac{i}{2}\,(\partial^\delta\bar{\psi})\left\{\gamma_\alpha, \Sigma_{\beta\delta}\right\}\psi + \frac{i}{2}\,\bar{\psi}\left\{\gamma_\alpha, \Sigma_{\beta\delta}\right\}\partial^\delta\psi. \tag{69}$$

Agora devemos abrir os cálculos nos termos acima que podem ser simplificados. Para o primeiro termo na equação acima comutando a matriz γ_δ para a esquerda,

$$\frac{i}{2}\,(\partial^\delta\bar{\psi})\left\{\gamma_\alpha, \Sigma_{\beta\delta}\right\}\psi = \frac{i}{2}\,(\partial^\delta\bar{\psi})\frac{i}{4}\left(4\eta_{\beta\delta}\gamma_\alpha - 4\eta_{\alpha\delta}\gamma_\beta + 2\gamma_\delta[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]\right)\psi$$

$$= \frac{i^2}{2}\left((\partial_\beta\bar{\psi})\gamma_\alpha - (\partial_\alpha\bar{\psi})\gamma_\beta + \frac{1}{2}\underbrace{(\partial^\delta\bar{\psi})\gamma_\delta}[\gamma_\alpha,\gamma_\beta]\right)\psi,$$

onde devemos utilizar a equação de Dirac (55) no termo marcado acima resultando em:

$$\frac{i}{2}\,(\partial^\delta\bar{\psi})\,\{\gamma_\alpha,\Sigma_{\beta\delta}\}\,\psi = -\frac{1}{2}\left((\partial_\beta\bar{\psi})\gamma_\alpha - (\partial_\alpha\bar{\psi})\gamma_\beta + \frac{i}{2}m\bar{\psi}[\gamma_\alpha,\gamma_\beta]\right)\psi. \tag{70}$$

Para o segundo termo da termo da equação (69) vamos comutar a matriz γ_δ para a direita,

$$\begin{aligned}\frac{i}{2}\,\bar{\psi}\,\{\gamma_\alpha,\Sigma_{\beta\delta}\}\,\partial^\delta\psi &= \frac{i}{2}\,\bar{\psi}\frac{i}{4}\,(4\eta_{\delta\alpha}\gamma_\beta - 4\eta_{\beta\delta}\gamma_\alpha + 2[\gamma_\alpha,\gamma_\beta]\gamma_\delta)\,\partial^\delta\psi \\ &= \frac{i^2}{2}\left(\bar{\psi}\gamma_\beta\partial_\alpha\psi - \bar{\psi}\gamma_\alpha\partial_\beta\psi + \frac{1}{2}\bar{\psi}[\gamma_\alpha,\gamma_\beta]\,\underbrace{\gamma_\delta\partial^\delta\psi}\right),\end{aligned}$$

onde devemos utilizar a equação de Dirac (54) no termo marcado acima resultando em:

$$\frac{i}{2}\,\bar{\psi}\,\{\gamma_\alpha,\Sigma_{\beta\delta}\}\,\partial^\delta\psi = -\frac{1}{2}\left(\bar{\psi}\gamma_\beta\partial_\alpha\psi - \bar{\psi}\gamma_\alpha\partial_\beta\psi - \frac{i}{2}m\bar{\psi}[\gamma_\alpha,\gamma_\beta]\psi\right). \tag{71}$$

Então somando os dois resultados (70) e (71) para obtermos o resultado para a equação (69),

$$\partial^\delta B_{\alpha\beta\delta} = -\frac{1}{2}\left((\partial_\beta\bar{\psi})\gamma_\alpha\psi - (\partial_\alpha\bar{\psi})\gamma_\beta\psi + \bar{\psi}\gamma_\beta\partial_\alpha\psi - \bar{\psi}\gamma_\alpha\partial_\beta\psi\right) \tag{72}$$

Então finalmente podemos colocar esse resultado na expressão (58) para obtermos o tensor energia-momento do campo espinorial simetrizado de Belifante-Rosenfeld,

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_{\alpha\beta} &= T^{(C)}_{\alpha\beta} - \frac{i}{2}\partial^\delta B_{\alpha\beta\delta} \\ &= \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma_\alpha\partial_\beta\psi - \frac{i}{2}(\partial_\beta\bar{\psi})\gamma_\alpha\psi + \frac{i}{4}\left((\partial_\beta\bar{\psi})\gamma_\alpha\psi - (\partial_\alpha\bar{\psi})\gamma_\beta\psi + \bar{\psi}\gamma_\beta\partial_\alpha\psi - \bar{\psi}\gamma_\alpha\partial_\beta\psi\right),\end{aligned}$$

onde chegamos ao resultado:

$$\mathfrak{T}_{\alpha\beta} = \frac{i}{4}(\bar{\psi}\gamma_\alpha\partial_\beta\psi + \bar{\psi}\gamma_\beta\partial_\alpha\psi) - \frac{i}{4}((\partial_\alpha\bar{\psi})\gamma_\beta\psi + (\partial_\beta\bar{\psi})\gamma_\alpha\psi), \tag{73}$$

em que o tensor energia-momento do campo espinorial está finalmente simetrizado.

A transição de uma equação ou lei física do espaço-tempo plano de Minkowski para um espaço-tempo curvo é feito através da substituição do tensor métrico $\eta_{\alpha\beta}$ do espaço-tempo plano pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo curvo. O princípio de equivalência nos diz que devemos substituir as derivadas ∂_α do espaço-tempo plano pelas derivadas covariantes ∇_μ do espaço-tempo curvo [16]. Veremos mais adiante que ao calcularmos o tensor energia-momento simétrico do campo espinorial no espaço-tempo curvo, resulta nesse mesmo resultado algébrico da equação (73) trocando ∂ por ∇.

V. TEORIA DE GAUGE DA GRAVITAÇÃO

Em 1954, Yang e Mills [17] introduziram uma invariância de grupo não-abeliano $SU(2)$ à ação do espinorial. Naquela época, a teoria de gauge não abeliana era apenas uma teoria matemática, mas hoje é uma teoria central na Física de Partículas Elementares, descrevendo as interações fundamentais eletrofraca e nuclear forte através de grupos internos que mantêm a invariância do funcional da ação. Dois anos após a publicação de Yang e Mills, em 1956, Ryoyu Utiyama publicou um trabalho sobre a teoria de gauge, até mais abrangente que o trabalho inicial de Yang e Mills, pois Utiyama elabora a teoria de gauge para todos os grupos de Lie semi-simples, e vai além ao formular a teoria de gauge para a gravitação, e posteriormente aprimorada por Sciama e Kibble através da invariância do grupo externo de Poincaré agindo no espaço de Minkowski [3–8].

Em uma teoria de Yang-Mills fazemos uma mudança de fase no campo ser invariante sob algum grupo interno como $U(1)$, $SU(2)$ ou $SU(3)$ por exemplo, e obtemos a interação do campo fermiônico com o eletromagnetismo, isospin ou cromodinâmica respectivamente. Para obter a interação do campo espinorial com a gravitação o calibre é feito sob as transformações de Lorentz de acordo com a equação (9),

$$\psi'(x') = \exp\left[\frac{i}{2}\epsilon^{\kappa\lambda}\Sigma_{\kappa\lambda}\right]\psi(x), \tag{74}$$

onde os parâmetros da transformação são antissimétricos, $\epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}$ e $\Sigma_{\mu\nu}$ são os geradores do grupo de Lorentz $SO(1,3)$. O calibre é inicializado sobre esse grupo externo $SO(1,3)$. Podemos reescrever a transformação acima na forma:

$$\psi' = \boldsymbol{U}\psi, \tag{75}$$

sendo que

$$\boldsymbol{U} = \exp\left[\frac{i}{2}\epsilon^{\kappa\lambda}\Sigma_{\kappa\lambda}\right]. \tag{76}$$

Os geradores da transformação do grupo de Lorentz $SO(3,1)$ são dados em termos das matrizes de Dirac, conforme visto na equação (65):

$$\Sigma_{\kappa\lambda} = \frac{i}{4}(\gamma_\kappa\gamma_\lambda - \gamma_\lambda\gamma_\kappa) = \frac{i}{4}[\gamma_\kappa, \gamma_\lambda] \tag{77}$$

que obedecem a álgebra de Lie:

$$i[\Sigma_{\kappa\lambda}, \Sigma_{\mu\nu}] = g_{\mu\lambda}\Sigma_{\kappa\nu} - g_{\mu\kappa}\Sigma_{\lambda\nu} + g_{\nu\lambda}\Sigma_{\mu\kappa} - g_{\nu\kappa}\Sigma_{\mu\lambda}. \tag{78}$$

Mais adiante será necessário utilizar a simplificação da expressão abaixo,

$$i\epsilon^{\kappa\lambda}[\Sigma_{\kappa\lambda}, \Sigma_{\mu\nu}]. \tag{79}$$

como exercício podemos calcular a simplificação usando a equação (78),

$$\begin{aligned} i\epsilon^{\kappa\lambda}[\Sigma_{\kappa\lambda}, \Sigma_{\mu\nu}] &= \epsilon^{\kappa\lambda}g_{\mu\lambda}\Sigma_{\kappa\nu} - \epsilon^{\kappa\lambda}g_{\mu\kappa}\Sigma_{\lambda\nu} + \epsilon^{\kappa\lambda}g_{\nu\lambda}\Sigma_{\mu\kappa} - \epsilon^{\kappa\lambda}g_{\nu\kappa}\Sigma_{\mu\lambda} \\ &= \epsilon^{\kappa}{}_{\mu}\Sigma_{\kappa\nu} - \epsilon_{\mu}{}^{\lambda}\Sigma_{\lambda\nu} + \epsilon^{\kappa}{}_{\nu}\Sigma_{\mu\kappa} - \epsilon_{\nu}{}^{\lambda}\Sigma_{\mu\lambda}, \end{aligned}$$

sabendo que $\epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}$ de forma que $g^{\mu\kappa}\epsilon_{\mu\nu} = -g^{\mu\kappa}\epsilon_{\nu\mu}$ resulta em $\epsilon^{\kappa}{}_{\nu} = -\epsilon_{\nu}{}^{\kappa}$, de forma que:

$$\begin{aligned} i\epsilon^{\kappa\lambda}[\Sigma_{\kappa\lambda}, \Sigma_{\mu\nu}] &= \epsilon^{\kappa}{}_{\mu}\Sigma_{\kappa\nu} + \epsilon^{\lambda}{}_{\mu}\Sigma_{\lambda\nu} - \epsilon_{\nu}{}^{\kappa}\Sigma_{\mu\kappa} - \epsilon_{\nu}{}^{\lambda}\Sigma_{\mu\lambda} \\ &= 2(\epsilon^{\kappa}{}_{\mu}\Sigma_{\kappa\nu} - \epsilon_{\nu}{}^{\kappa}\Sigma_{\mu\kappa}). \end{aligned} \tag{80}$$

O espinor adjunto $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ se transforma como:

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi}\boldsymbol{U}^\dagger, \tag{81}$$

de forma que o termo $\bar{\psi}\psi$ seja invariante de Lorentz pela transformação (74),

$$\bar{\psi}'\psi' = (\bar{\psi}\boldsymbol{U}^\dagger)(\boldsymbol{U}\psi) = \bar{\psi}\psi, \tag{82}$$

onde deve-se ter:

$$\boldsymbol{U}^\dagger\boldsymbol{U} = 1, \tag{83}$$

os seja $\boldsymbol{U}^\dagger = \boldsymbol{U}^{-1}$.

Agora vejamos a Lagrangiana do campo espinorial (ou de Dirac):

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - (\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi\right) + m\bar{\psi}\psi. \tag{84}$$

Onde as matrizes γ^μ obedecem a algebra de Clifford:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}. \tag{85}$$

sendo $\mathbb{1}$ a matriz identidade 4×4.

Então quando mudamos de referencial o termo $m\bar{\psi}\psi$ será invariante de acordo com o resultado (82). porém os termos cinéticos não serão invariantes por transformações de Lorentz. Vejamos o termo $\frac{i}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi\right)$

$$\bar{\psi}'\gamma^\mu\partial_\mu\psi' = (\bar{\psi}\boldsymbol{U}^{-1})\gamma^\mu\partial_\mu(\boldsymbol{U}\psi)$$

$$= \bar{\psi}\boldsymbol{U}^{-1}\gamma^{\mu}[(\partial_{\mu}\boldsymbol{U})\psi + \boldsymbol{U}\partial_{\mu}\psi]$$
$$= \bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + \bar{\psi}\gamma^{\mu}\boldsymbol{U}^{-1}(\partial_{\mu}\boldsymbol{U})\psi, \quad (86)$$

onde é claro que o segundo termo quebra a invariancia da Lagrangiana. Então surge a necessidade de se obter uma derivada covariante,

$$\boldsymbol{D}'_{\mu}\psi' = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}_{\mu}\psi, \quad (87)$$

para que o termo cinético em termos desta derivada covariante, $\frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\boldsymbol{D}_{\mu}\psi$, sob uma transformação de Lorentz resulte em:

$$\bar{\psi}'\gamma^{\mu}\boldsymbol{D}'_{\mu}\psi' = (\bar{\psi}\boldsymbol{U}^{-1})(\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}_{\mu}\psi) = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\boldsymbol{D}_{\mu}\psi. \quad (88)$$

Desta forma o termo cinético será invariante pela transformação (74). Observe também que da expressão (87) resulta em:

$$\boldsymbol{D}'_{\mu}\psi' = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}_{\mu}(\boldsymbol{U}^{-1}\psi'), \quad (89)$$

onde usamos a expressão (75), com $\boldsymbol{U}^{-1}\psi' = \psi$, de forma que a transformação da derivada covariante de um sistema de coordenadas $\mathcal{O}$ para outro sistema de coordenadas $\mathcal{O}'$ é dada por:

$$\boldsymbol{D}'_{\mu} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}_{\mu}\boldsymbol{U}^{-1}. \quad (90)$$

Para obter a interação do campo espinorial com a gravidade vamos expressar a Lagrangiana em termos de uma tétrade ou vierbein em uma base não coordenada dada por:

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_{\alpha} = e_{\alpha}{}^{\mu}\boldsymbol{E}_{\mu} \quad (91)$$

com as respectivas formas diferenciais dadas por:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{\beta} = \omega^{\beta}{}_{\nu}dx^{\nu}. \quad (92)$$

onde $(e_{\alpha}{}^{\mu})$ e $(\omega^{\beta}{}_{\nu}) \in GL(4,\mathbb{R})$ com

$$\omega^{\beta}{}_{\nu}e_{\alpha}{}^{\nu} = \delta^{\beta}{}_{\alpha} \qquad \text{e} \qquad \omega^{\beta}{}_{\nu}e_{\beta}{}^{\mu} = \delta_{\nu\mu}. \quad (93)$$

Para uma revisão mais detalhada sobre bases não coordenadas veja a referência [13] Em termos de uma base não coordenada ortonormal as matrizes de Dirac são dadas por:

$$\gamma^{\mu} = \gamma^{\alpha}e_{\alpha}{}^{\mu} \qquad \text{e} \qquad \gamma_{\alpha} = e_{\alpha}{}^{\mu}\gamma_{\mu}, \quad (94)$$

de forma que a álgebra de Clifford para as matrizes γ_{α} seja:

$$\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta} + \gamma_{\beta}\gamma_{\alpha} = e_{\alpha}{}^{\mu}\gamma^{\mu}e_{\beta}{}^{\nu}\gamma^{\nu} + e_{\beta}{}^{\nu}\gamma^{\nu}e_{\alpha}{}^{\mu}\gamma^{\mu}$$
$$\{\gamma_{\alpha},\gamma_{\beta}\} = \{\gamma_{\mu},\gamma_{\nu}\}e_{\alpha}{}^{\mu}e_{\beta}{}^{\nu}$$

onde pode se usar a álgebra de Clifford (85), que resulta em

$$\{\gamma_{\alpha},\gamma_{\beta}\} = 2g_{\mu\nu}e_{\alpha}{}^{\mu}e_{\beta}{}^{\nu}\mathbb{1}$$

ou então:

$$\{\gamma_{\alpha},\gamma_{\beta}\} = 2\eta_{\alpha\beta}\mathbb{1},$$

onde identificamos que

$$g_{\mu\nu}e_{\alpha}{}^{\mu}e_{\beta}{}^{\nu} = \eta_{\alpha\beta} \quad (95)$$

A derivada covariante será dada por:

$$\boldsymbol{D}_{\mu} = \omega^{\beta}{}_{\mu}\boldsymbol{D}_{\beta}, \quad (96)$$

de forma que o termo cinético da Lagrangiana de Dirac $\frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\boldsymbol{D}_{\mu}\psi$ seja:

$$\frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\boldsymbol{D}_{\mu}\psi = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^{\alpha}e_{\alpha}{}^{\mu}\omega^{\beta}{}_{\mu}\boldsymbol{D}_{\beta}\psi = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^{\alpha}\delta_{\alpha}{}^{\beta}\boldsymbol{D}_{\beta}\psi = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^{\alpha}\boldsymbol{D}_{\alpha}\psi. \quad (97)$$

Da expressão (90), onde $\boldsymbol{D}'_{\mu} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}_{\mu}\boldsymbol{U}^{-1}$, temos

$$\boldsymbol{D}'_{\mu} = \omega'^{\beta}{}_{\mu}\boldsymbol{D}'_{\beta} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}_{\mu}\boldsymbol{U}^{-1},$$

que multiplicando por $e'_{\alpha}{}^{\mu}$ resulta em:

$$e'_{\alpha}{}^{\mu}\omega'^{\beta}{}_{\mu}\boldsymbol{D}'_{\beta} = e'_{\alpha}{}^{\mu}\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}_{\mu}\boldsymbol{U}^{-1},$$

sabendo que a transformação de Lorentz para $e'_{\alpha}{}^{\mu}$ é dada por $e'_{\alpha}{}^{\mu} = \Lambda_{\alpha}{}^{\beta}e_{\beta}{}^{\mu}$ [13], então teremos:

$$\delta_{\alpha}{}^{\beta}\boldsymbol{D}'_{\beta} = \Lambda_{\alpha}{}^{\beta}e_{\beta}{}^{\mu}\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}_{\mu}\boldsymbol{U}^{-1}$$
$$\boldsymbol{D}'_{\alpha} = \Lambda_{\alpha}{}^{\beta}\boldsymbol{U}e_{\beta}{}^{\mu}\boldsymbol{D}_{\mu}\boldsymbol{U}^{-1},$$

de forma que temos o resultado:

$$\boldsymbol{D}'_{\alpha} = \Lambda_{\alpha}{}^{\beta}\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}_{\beta}\boldsymbol{U}^{-1}. \quad (98)$$

Agora seja a derivada covariante dada por:

$$\boldsymbol{D}_{\alpha} = e_{\alpha}{}^{\mu}(\partial_{\mu} + \Omega_{\mu}), \quad (99)$$

então vejamos como esta derivada covariante se transforma sob as transformações de Lorentz dada pela expressão (98), tal que:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}'_{\alpha}\psi &= \Lambda_{\alpha}{}^{\beta}\boldsymbol{U}e_{\beta}{}^{\mu}(\partial_{\mu} + \Omega_{\mu})\boldsymbol{U}^{-1}\psi \\ &= \Lambda_{\alpha}{}^{\beta}\boldsymbol{U}e_{\beta}{}^{\mu}[(\partial_{\mu}\boldsymbol{U}^{-1})\psi + \boldsymbol{U}^{-1}\partial_{\mu}\psi + \Omega_{\mu}\boldsymbol{U}^{-1}\psi] \\ &= \Lambda_{\alpha}{}^{\beta}\boldsymbol{U}e_{\beta}{}^{\mu}[-\boldsymbol{U}^{-2}(\partial_{\mu}\boldsymbol{U})\psi + \boldsymbol{U}^{-1}\partial_{\mu}\psi + \Omega_{\mu}\boldsymbol{U}^{-1}\psi] \\ &= \Lambda_{\alpha}{}^{\beta}e_{\beta}{}^{\mu}[\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{-1}\partial_{\mu}\psi + \boldsymbol{U}\Omega_{\mu}\boldsymbol{U}^{-1}\psi - \boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^{-2}(\partial_{\mu}\boldsymbol{U})\psi] \\ &= e'_{\alpha}{}^{\mu}(\partial_{\mu} + \boldsymbol{U}\Omega_{\mu}\boldsymbol{U}^{-1} - \boldsymbol{U}^{-1}\partial_{\mu}\boldsymbol{U})\psi, \quad (100)\end{aligned}$$

e fazendo a identificação,

$$\boldsymbol{D}'_{\alpha} = e'_{\alpha}{}^{\mu}(\partial_{\mu} + \Omega'_{\mu}), \quad (101)$$

teremos então:

$$\Omega'_\mu = \boldsymbol{U}\Omega_\mu \boldsymbol{U}^{-1} - \boldsymbol{U}^{-1}\partial_\mu \boldsymbol{U}. \tag{102}$$

Compare a expressão (99) com (101). Vale observar que:

$$\partial_\alpha = e_\alpha{}^\mu \partial_\mu$$

e que:

$$\partial'_\alpha = e'_\alpha{}^\mu \partial_\mu$$

de forma que a expressão (99) possa ser escrita como:

$$\boldsymbol{D}_\alpha = e_\alpha{}^\mu(\partial_\mu + \Omega_\mu) = \partial_\alpha + e_\alpha{}^\mu \Omega_\mu$$

que no sistema de coordenadas $\mathcal{O}'$ é dado por

$$\boldsymbol{D}'_\alpha = \partial'_\alpha + e'_\alpha{}^\mu \Omega'_\mu$$

então temos:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}'_\alpha &= e'_\alpha{}^\mu \partial_\mu + e'_\alpha{}^\mu \Omega'_\mu \\ &= e'_\alpha{}^\mu(\partial_\mu + \Omega'_\mu)\end{aligned}$$

que está em concordância com o resultado (101).

Da transformação de Lorentz para o espinor dado pela expressão (76) com $\epsilon^{\alpha\beta}$ infinitesimal, temos que:

$$\boldsymbol{U} = \exp\left[\frac{i}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}\right] \approx 1 + \frac{i}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}, \tag{103}$$

Então substituindo esta transformação infinitesimal na expressão (102) e desprezando os termos de segunda ordem em ϵ, teremos:

$$\begin{aligned}\Omega'_\mu &= \left(1 + \frac{i}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}\right)\Omega_\mu\left(1 - \frac{i}{2}\epsilon^{\gamma\delta}\Sigma_{\gamma\delta}\right) - \left(1 - \frac{i}{2}\epsilon^{\gamma\delta}\Sigma_{\gamma\delta}\right)\partial_\mu\left(1 + \frac{i}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}\right) \\ &= \left(1 + \frac{i}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}\right)\left(\Omega_\mu - \frac{i}{2}\Omega_\mu\epsilon^{\gamma\delta}\Sigma_{\gamma\delta}\right) - \left(1 - \frac{i}{2}\epsilon^{\gamma\delta}\Sigma_{\gamma\delta}\right)\partial_\mu\frac{i}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta} \\ &= \Omega_\mu + \frac{i}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}\Omega_\mu - \frac{i}{2}\epsilon^{\gamma\delta}\Omega_\mu\Sigma_{\gamma\delta} - \partial_\mu\frac{i}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta} \\ &= \Omega_\mu + \frac{i}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\left(\Sigma_{\alpha\beta}\Omega_\mu - \Omega_\mu\Sigma_{\alpha\beta}\right) - \frac{i}{2}(\partial_\mu\epsilon^{\alpha\beta})\Sigma_{\alpha\beta} \\ &= \Omega_\mu + \frac{i}{2}\epsilon^{\alpha\beta}[\Sigma_{\alpha\beta}, \Omega_\mu] - \frac{i}{2}(\partial_\mu\epsilon^{\alpha\beta})\Sigma_{\alpha\beta}.\end{aligned} \tag{104}$$

É possível identificar o elemento geométrico que se transforma como Ω_μ. Nas referências [12, 13] tem-se a mudança de coordenadas da conexão 1-forma,

$$\boldsymbol{\Gamma}'^\alpha{}_\beta = \Lambda^\alpha{}_\gamma \boldsymbol{\Gamma}^\gamma{}_\delta (\Lambda^{-1})^\delta{}_\beta + \Lambda^\alpha{}_\gamma d(\Lambda^{-1})^\gamma{}_\beta. \tag{105}$$

Utilizando uma transformação infinitesimal local de coordenadas, onde

$$\Lambda^\alpha{}_\gamma \approx \delta^\alpha{}_\gamma + \epsilon^\alpha{}_\gamma$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}'^\alpha{}_\beta &= (\delta^\alpha{}_\gamma + \epsilon^\alpha{}_\gamma)\boldsymbol{\Gamma}^\gamma{}_\delta(\delta^\delta{}_\beta - \epsilon^\delta{}_\beta) + (\delta^\alpha{}_\gamma + \epsilon^\alpha{}_\gamma)d(\delta^\gamma{}_\beta - \epsilon^\gamma{}_\beta) \\ &= (\delta^\alpha{}_\gamma + \epsilon^\alpha{}_\gamma)(\boldsymbol{\Gamma}^\gamma{}_\beta - \boldsymbol{\Gamma}^\gamma{}_\delta\epsilon^\delta{}_\beta) + (\delta^\alpha{}_\gamma - \epsilon^\alpha{}_\gamma)d\epsilon^\gamma{}_\beta \\ &= \boldsymbol{\Gamma}^\alpha{}_\beta + \epsilon^\alpha{}_\gamma\boldsymbol{\Gamma}^\gamma{}_\beta - \boldsymbol{\Gamma}^\alpha{}_\delta\epsilon^\delta{}_\beta - d\epsilon^\alpha{}_\beta.\end{aligned} \tag{106}$$

Da definição de 1-forma temos que

$$\boldsymbol{\Gamma}^\alpha{}_\beta \equiv \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}^\gamma = \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}\omega^\gamma{}_\mu\, dx^\mu = \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}dx^\mu, \tag{107}$$

e substituindo estes valores na expressão (106) obteremos,

$$\Gamma'^\alpha{}_{\mu\beta}dx^\mu = \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}dx^\mu + \epsilon^\alpha{}_\gamma\Gamma^\gamma{}_{\mu\beta}dx^\mu - \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}dx^\mu\epsilon^\gamma{}_\beta - \partial_\mu\epsilon^\alpha{}_\beta dx^\mu,$$

ou então

$$\Gamma'^\alpha{}_{\mu\beta} = \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} + \epsilon^\alpha{}_\gamma\Gamma^\gamma{}_{\mu\beta} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\gamma}\epsilon^\gamma{}_\beta - \partial_\mu\epsilon^\alpha{}_\beta. \tag{108}$$

Vamos levantar o índice β e multiplicar a expressão acima pelo gerador de transformação de Lorentz para espinor $\Sigma_{\alpha\beta}$,

$$\begin{aligned}\Gamma'{}^{\alpha}{}_{\mu}{}^{\beta}\Sigma_{\alpha\beta} &= \Gamma^{\alpha}{}_{\mu}{}^{\beta}\Sigma_{\alpha\beta} + \epsilon^{\alpha}{}_{\gamma}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu}{}^{\beta}\Sigma_{\alpha\beta} - \epsilon^{\gamma\beta}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\gamma}\Sigma_{\alpha\beta} - (\partial_\mu\epsilon^{\alpha\beta})\Sigma_{\alpha\beta}\\ &= \Gamma^{\alpha}{}_{\mu}{}^{\beta}\Sigma_{\alpha\beta} + \underbrace{\epsilon^{\alpha}{}_{\gamma}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu}{}^{\beta}\Sigma_{\alpha\beta} - \epsilon_{\gamma}{}^{\beta}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu}{}^{\gamma}\Sigma_{\alpha\beta}} - (\partial_\mu\epsilon^{\alpha\beta})\Sigma_{\alpha\beta}.\end{aligned} \tag{109}$$

É possível obter uma expressão que irá facilitar a identificação da derivada covariante, por rever os termos sublinhados acima.

Como exercício vamos pegar o resultado da expressão (80)

$$i\epsilon^{\alpha\beta}[\Sigma_{\alpha\beta},\Sigma_{\gamma\delta}] = 2(\epsilon^{\alpha}{}_{\gamma}\Sigma_{\alpha\delta} - \epsilon_{\delta}{}^{\alpha}\Sigma_{\gamma\alpha})$$

e multiplicar por $\Gamma^{\gamma}{}_{\mu}{}^{\delta}$, resultando em

$$\begin{aligned} i\epsilon^{\alpha\beta}[\Sigma_{\alpha\beta},\Sigma_{\gamma\delta}]\Gamma^{\gamma}{}_{\mu}{}^{\delta} &= 2(\epsilon^{\alpha}{}_{\gamma}\Sigma_{\alpha\delta}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu}{}^{\delta} - \epsilon_{\delta}{}^{\alpha}\Sigma_{\gamma\alpha}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu}{}^{\delta})\\ \epsilon^{\alpha\beta}[\Sigma_{\alpha\beta},\frac{i}{2}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu}{}^{\delta}\Sigma_{\gamma\delta}] &= \epsilon^{\alpha}{}_{\gamma}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu}{}^{\delta}\Sigma_{\alpha\delta} - \epsilon_{\delta}{}^{\alpha}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu}{}^{\delta}\Sigma_{\gamma\alpha}\end{aligned}$$

trocando alguns índices fechados, resulta em

$$\epsilon^{\alpha}{}_{\gamma}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu}{}^{\beta}\Sigma_{\alpha\beta} - \epsilon_{\gamma}{}^{\beta}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu}{}^{\gamma}\Sigma_{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\beta}[\Sigma_{\alpha\beta},\frac{i}{2}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu}{}^{\delta}\Sigma_{\gamma\delta}] \tag{110}$$

Então podemos substituir o resultado obtido acima na equação (109),

$$\Gamma'^{\alpha}{}_{\mu}{}^{\beta}\Sigma_{\alpha\beta} = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu}{}^{\beta}\Sigma_{\alpha\beta} + \epsilon^{\alpha\beta}[\Sigma_{\alpha\beta},\frac{i}{2}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu}{}^{\delta}\Sigma_{\gamma\delta}] - (\partial_\mu\epsilon^{\alpha\beta})\Sigma_{\alpha\beta}. \tag{111}$$

Agora vamos multiplicar este resultado por $\frac{i}{2}$ e compará-lo com a expressão de Ω_μ obtida em (104),

$$\begin{cases} \frac{i}{2}\Gamma'^{\alpha}{}_{\mu}{}^{\beta}\Sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu}{}^{\beta}\Sigma_{\alpha\beta} + \frac{i}{2}\epsilon^{\alpha\beta}[\Sigma_{\alpha\beta},\frac{i}{2}\Gamma^{\gamma}{}_{\mu}{}^{\delta}\Sigma_{\gamma\delta}] - \frac{i}{2}(\partial_\mu\epsilon^{\alpha\beta})\Sigma_{\alpha\beta}\\ \Omega'_\mu = \Omega_\mu + \frac{i}{2}\epsilon^{\alpha\beta}[\Sigma_{\alpha\beta},\Omega_\mu] - \frac{i}{2}(\partial_\mu\epsilon^{\alpha\beta})\Sigma_{\alpha\beta}\end{cases}$$

onde é possível identificar:

$$\boldsymbol{\Omega}_\mu = \frac{i}{2}\Gamma^{\alpha}{}_{\mu}{}^{\beta}\Sigma_{\alpha\beta}. \tag{112}$$

Então a derivada covariante proposta na expressão (99) para o gauge dada por

$$\boldsymbol{D}_\alpha = e_\alpha{}^\mu(\partial_\mu + \boldsymbol{\Omega}_\mu)$$

fica sendo:

$$\boldsymbol{D}_\alpha = e_\alpha{}^\mu\left(\partial_\mu + \frac{i}{2}\Gamma^{\beta}{}_{\mu}{}^{\gamma}\Sigma_{\beta\gamma}\right), \tag{113}$$

ou então,

$$\boldsymbol{D}_\alpha = \partial_\alpha + \frac{i}{2}\Gamma^{\beta}{}_{\alpha}{}^{\gamma}\Sigma_{\beta\gamma}. \tag{114}$$

Na estrutura da teoria de campo de gauge de Poincaré, denotada por PG, o campo de matéria espinorial $\psi(x^\mu)$ ao ser transladado de x^μ para $x^\mu + \epsilon^\mu$ (onde ϵ^μ são 4 parâmetros infinitesimais de translação) e com a orientação fixa, o gerador de translação para o campo espinorial é a derivada covariante obtida na equação (113), sendo essa uma operação de transporte paralelo [8]. A derivada covariante (113) é uma transformação de tipo translação e distingue a teoria de campo de gauge de Poincaré das teorias de gauge de Yang-Mills que são transformações de simetrias internas quando o campo $\psi(x^\mu)$ é deslocado para um ponto diferente no espaço-tempo.

A derivada covariante de gauge acima, ao operar em um espinor ψ, terá como gerador de transformação de Lorentz as matrizes: $\Sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{4}[\gamma_\alpha,\gamma_\beta]$. Porém essa mesma derivada covariante pode operar em outras grandezas onde teremos:

- $\Sigma_{\alpha\beta} = 0$ quando a derivada covariante $\boldsymbol{D}_\alpha$ for aplicada a um campo escalar ϕ;
- $\Sigma_{\alpha\beta} \to [\Sigma_{\alpha\beta}]^\delta_\gamma = i(\delta_\beta{}^\delta\eta_{\alpha\gamma} - \delta_\alpha{}^\delta\eta_{\beta\gamma})$ quando $\boldsymbol{D}_\alpha$ for aplicada a um campo vetorial contravariante A^α de forma que $A'^\alpha = A^\alpha + \epsilon^\alpha{}_\beta A^\beta$ para transformações infinitesimais. Ao passo que teremos $\Sigma_{\alpha\beta} \to [\Sigma_{\alpha\beta}]^\delta_\gamma = i(\eta_{\beta\gamma}\delta_\alpha{}^\delta - \eta_{\alpha\gamma}\delta_\beta{}^\delta)$ quando $\boldsymbol{D}_\alpha$ for aplicada a um campo vetorial covariante A_α de forma que $A'_\alpha = A_\alpha + \epsilon_\alpha{}^\beta A_\beta$ para transformações infinitesimais.

Como exercício vamos calcular a derivada de um vetor nesse sistema não-coordenado ortonormal,

$$\boldsymbol{D}_\alpha V^\beta = \partial_\alpha V^\beta + \frac{i}{2}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha}{}^{\delta}\Sigma_{\gamma\delta}V^\beta, \tag{115}$$

onde $\Sigma_{\gamma\delta}V^\beta = [\Sigma_{\gamma\delta}]^\beta_\epsilon V^\epsilon$, observando que o vetor é contravariante de forma que:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_\alpha V^\beta &= \partial_\alpha V^\beta + \frac{i}{2}\Gamma^\gamma{}_\alpha{}^\delta\ i(\delta_\delta{}^\beta\eta_{\gamma\epsilon} - \delta_\gamma{}^\beta\eta_{\delta\epsilon})V^\epsilon \\ &= \partial_\alpha V^\beta - \frac{1}{2}\Gamma_{\epsilon\alpha}{}^\beta V^\epsilon + \frac{1}{2}\Gamma^\beta{}_{\alpha\epsilon}V^\epsilon\end{aligned}$$

nesse sistema não-coordenado ortonormal temos que $\Gamma_{\epsilon\alpha}{}^\beta = -\Gamma^\beta{}_{\alpha\epsilon}$ que resulta em:

$$\boldsymbol{D}_\alpha V^\beta = \partial_\alpha V^\beta + V^\gamma\Gamma^\beta{}_{\alpha\gamma}. \tag{116}$$

Observemos agora que a derivada covariante de gauge $\boldsymbol{D}_\alpha$ realiza a mesma operação de derivada covariante em um manifold com uma métrica $g_{\alpha\beta}$,

$$\nabla_\alpha V^\beta = \partial_\alpha V^\beta + V^\gamma\Gamma^\beta{}_{\alpha\gamma}.$$

A partir desse ponto vamos trocar o símbolo da derivada covariante de gauge pela conexão afim ∇. No apêncice é mostrado os detalhes de como obter o termo de curvatura a partir da derivada covariante.

A ação para um campo espinorial no espaço-tempo curvo deve ser dada por:

$$S_M = \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{i}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - (\nabla_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi\right] + m\bar{\psi}\psi\right\}, \tag{117}$$

onde devemos chamar a atenção para o termo $\nabla_\mu\bar{\psi} = \partial_\mu\bar{\psi} - \frac{i}{2}\Gamma^\gamma{}_\mu{}^\delta\Sigma_{\gamma\delta}\bar{\psi}$ e usando a identidade $\sqrt{-g} = \det(e_\alpha{}^\mu) = \det(e)$, obtemos a ação do campo espinorial invariante sob mudanças gerais de coordenadas

$$S_M = \int_\Omega d^4x\ \det(e)\left\{\frac{i}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^\alpha\ e_\alpha{}^\mu\left(\partial_\mu + \frac{i}{2}\Gamma^\gamma{}_\mu{}^\delta\Sigma_{\gamma\delta}\right)\psi - e_\alpha{}^\mu\left(\partial_\mu\bar{\psi} - \frac{i}{2}\Gamma^\gamma{}_\mu{}^\delta\Sigma_{\gamma\delta}\bar{\psi}\right)\gamma^\alpha\psi\right] + m\bar{\psi}\psi\right\}. \tag{118}$$

VI. TENSORES ENERGIA-MOMENTO E DENSIDADE DE CORRENTE DE SPIN PARA O CAMPO ESPINORIAL

Vimos que o tensor energia-momento devido a presença de um campo é dado pela expressão (47),

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}}.$$

Esta expressão é útil para encontrar o tensor energia-momento quando a ação S do campo é dada em termos da métrica $g_{\mu\nu}$, como é o caso do campo escalar e do campo vetorial. Porém no caso do campo espinorial a ação é dado em termos dos vierbein $e_\alpha{}^\mu$ conforme se vê na expressão (118):

$$S_M = \int_\Omega d^4x\ \det(e)\left\{\frac{i}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^\alpha\ e_\alpha{}^\mu\left(\partial_\mu + \frac{i}{2}\Gamma^{\gamma\delta}{}_\mu\Sigma_{\gamma\delta}\right)\psi - e_\alpha{}^\mu\left(\partial_\mu\bar{\psi} - \frac{i}{2}\Gamma^{\gamma\delta}{}_\mu\Sigma_{\gamma\delta}\bar{\psi}\right)\gamma^\alpha\psi\right] + m\bar{\psi}\psi\right\}$$

ou em termos da Lagrangiana de matéria

$$\mathcal{L}_M = \det(e)\left\{\frac{i}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^\alpha\ e_\alpha{}^\mu\nabla_\mu\psi - e_\alpha{}^\mu(\nabla_\mu\bar{\psi})\gamma^\alpha\psi\right] + m\bar{\psi}\psi\right\}. \tag{119}$$

sendo então que $S_M = S_M(\psi, e_\alpha{}^\mu, \Gamma^{\gamma\delta}{}_\mu)$. Façamos então um exercício para obtermos o tensor energia-momento para o campo espinorial, calculando a variação da Lagrangiana em relação ao vierbein,

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta e_\gamma{}^\rho} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}}\frac{\delta g^{\mu\nu}}{\delta e_\gamma{}^\rho}, \tag{120}$$

onde podemos identificar o termo $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}}$ com o tensor energia-momento,

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\sqrt{-g}}{2}T_{\mu\nu}.$$

Precisamos agora é calcular o termo $\frac{\delta g^{\mu\nu}}{\delta e_\gamma{}^\rho}$. Podemos fazer isso utilizando a expressão:

$$g^{\mu\nu} = e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu\eta^{\alpha\beta} \tag{121}$$

de forma que:

$$\delta g^{\mu\nu} = (\delta e_\alpha{}^\mu)\, e_\beta{}^\nu\eta^{\alpha\beta} + e_\alpha{}^\mu(\delta e_\beta{}^\nu)\eta^{\alpha\beta}, \tag{122}$$

assim podemos obter

$$\begin{aligned}\frac{\delta g^{\mu\nu}}{\delta e_\gamma{}^\rho} &= \left(\frac{\delta e_\alpha{}^\mu}{\delta e_\gamma{}^\rho}\right) e_\beta{}^\nu\eta^{\alpha\beta} + \left(\frac{\delta e_\beta{}^\nu}{\delta e_\gamma{}^\rho}\right) e_\alpha{}^\mu\eta^{\alpha\beta} \\ &= \delta_\alpha{}^\gamma\delta_\rho{}^\mu e_\beta{}^\nu\eta^{\alpha\beta} + \delta_\beta{}^\gamma\delta_\rho{}^\nu e_\alpha{}^\mu\eta^{\alpha\beta} \\ &= \delta_\rho{}^\mu e_\beta{}^\nu\eta^{\beta\gamma} + \delta_\rho{}^\nu e_\alpha{}^\mu\eta^{\alpha\gamma}.\end{aligned}$$

Então, substituindo esses resultados na expressão (120), teremos que:

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta e_\gamma{}^\rho} &= \frac{\sqrt{-g}}{2}T_{\mu\nu}(\delta_\rho{}^\mu e_\beta{}^\nu\eta^{\beta\gamma} + \delta_\rho{}^\nu e_\alpha{}^\mu\eta^{\alpha\gamma}) \\ &= \det(e)\ T_{\mu\nu}\delta_\rho{}^\mu e_\beta{}^\nu\eta^{\beta\gamma} \\ &= \det(e)\ T_{\rho\nu}e_\beta{}^\nu\eta^{\beta\gamma}\end{aligned}$$

e multiplicando a expressão acima por $e_\gamma{}^\sigma$ obteremos:

$$e_\gamma{}^\sigma\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta e_\gamma{}^\rho} = \det(e)\ T_{\rho\nu}e_\beta{}^\nu e_\gamma{}^\sigma\eta^{\beta\gamma}$$

e lembrando que:

$$e_\beta{}^\nu e_\gamma{}^\sigma\eta^{\beta\gamma} = g^{\nu\sigma},$$

então

$$e_\gamma{}^\sigma\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta e_\gamma{}^\rho} = \det(e)\ T_{\rho\nu}g^{\nu\sigma}$$

que resulta finalmente em:

$$\frac{e_\gamma{}^\sigma}{\det(e)}\ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta e_\gamma{}^\rho} = T_\rho{}^\sigma \tag{123}$$

ou ainda:

$$T_{\mu\nu} = \frac{e_{\alpha\mu}}{\det(e)}\ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta e_\alpha{}^\nu}. \tag{124}$$

Vamos então calcular o tensor energia momento para o campo espinorial de Dirac dado pela Lagrangiana da ação (119).

Usando o fato que

$$\delta[\det(e)] = -\det(e)\omega^\alpha{}_\mu\delta e_\alpha{}^\mu, \tag{125}$$

deforma que $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta e_\alpha{}^\nu}$, resultará em:

$$\delta\mathcal{L} = -\det(e)\omega^\alpha{}_\sigma\delta e_\alpha{}^\sigma\left\{\frac{i}{2}\left[\bar\psi\gamma^\alpha\ e_\alpha{}^\rho\nabla_\rho\psi - e_\alpha{}^\rho(\nabla_\rho\bar\psi)\gamma^\alpha\psi\right] + m\bar\psi\psi\right\} + \det(e)\left\{\frac{i}{2}\left[\bar\psi\gamma^\alpha\ (\delta e_\alpha{}^\rho)\nabla_\rho\psi - (\delta e_\alpha{}^\rho)(\nabla_\rho\bar\psi)\gamma^\alpha\psi\right]\right\} \tag{126}$$

O primeiro termo da expressão é um termo de vínculo que pode ser escrito da seguinte forma:

$$\left\{\frac{i}{2}\left[\bar\psi\gamma^\alpha\ e_\alpha{}^\rho\nabla_\rho\psi - e_\alpha{}^\rho(\nabla_\rho\bar\psi)\gamma^\alpha\psi\right] + m\bar\psi\psi\right\} = \frac{1}{2}\bar\psi\left[i\gamma^\rho\nabla_\rho\psi + m\psi\right] - \frac{1}{2}[i\nabla_\rho\bar\psi\gamma^\rho - m\bar\psi]\psi$$

Vemos então que os termos entre colchetes satisfazem as equações de Dirac:

$$i\gamma^\rho\nabla_\rho\psi + m\psi = 0 \qquad \text{e} \qquad i\nabla_\rho\bar\psi\gamma^\rho - m\bar\psi = 0, \tag{127}$$

de forma que teremos:

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta e_\alpha{}^\nu} &= \det(e)\left\{\frac{i}{2}\left[\bar\psi\gamma^\beta\ \left(\frac{\delta e_\beta{}^\rho}{\delta e_\alpha{}^\nu}\right)\nabla_\rho\psi - \left(\frac{\delta e_\beta{}^\rho}{\delta e_\alpha{}^\nu}\right)(\nabla_\rho\bar\psi)\gamma^\beta\psi\right]\right\} \\ &= \det(e)\left\{\frac{i}{2}\left[\bar\psi\gamma^\beta\ (\delta_\beta{}^\alpha\delta_\nu{}^\rho)\nabla_\rho\psi - (\delta_\beta{}^\alpha\delta_\nu{}^\rho)(\nabla_\rho\bar\psi)\gamma^\beta\psi\right]\right\} \\ &= \det(e)\left\{\frac{i}{2}\left[\bar\psi\gamma^\alpha\nabla_\nu\psi - (\nabla_\nu\bar\psi)\gamma^\alpha\psi\right]\right\},\end{aligned}$$

então o tensor energia momento (124) se torna:

$$T_{\mu\nu} = \frac{e_{\alpha\mu}}{\det(e)}\ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta e_\alpha{}^\nu} = \frac{e_{\alpha\mu}}{\det(e)}\det(e)\left\{\frac{i}{2}\left[\bar\psi\gamma^\alpha\nabla_\nu\psi - (\nabla_\nu\bar\psi)\gamma^\alpha\psi\right]\right\}$$

ou seja,

$$T_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\bar{\psi}\gamma_\mu\nabla_\nu\psi - (\nabla_\nu\bar{\psi})\gamma_\mu\psi\right]. \qquad (128)$$

O tensor energia-momento deve ser simétrico. Na seção IV, vimos que no espaço tempo plano, na Teoria Clássica de Campos, o cálculo do tensor energia-momento obtido pelo teorema de Noether resulta em um tensor energia momento semelhante ao obtido na equação acima (128) e vimos como podemos utilizar o mecanismo de Belifante-Rosenfeld para simetrizar o tensor energia-momento. Vimos que a contribuição da densidade de corrente de spin contribui para o tensor energia-momento. Aqui acontece o mesmo problema, a densidade de corrente de spin contribui na expressão matemática do tensor energia-momento de Hilbert. Vejamos como realizar esses cálculos. Primeiro observe que a variação da ação de matéria pode ser reescrita como,

$$\delta S = \frac{1}{2}\int_\Omega d^4x\sqrt{-g}\; T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\int_\Omega d^4x\sqrt{-g}\; \mathfrak{S}^{\nu}{}_{\rho}{}^{\mu}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}. \qquad (129)$$

onde substituimos utilizamos a equação (11), $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ e também a equação (48) $\mathsf{T}_{\mu\lambda\nu} + \mathsf{T}_\nu g_{\lambda\mu} - \mathsf{T}_\lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G\,\mathfrak{S}_{\nu\lambda\mu}$. O termo $\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}$ na segunda integral da equação acima (129) pode reescrito em termos de $\delta g_{\mu\nu}$. Vamos realizar esse cálculo partindo da identidade,

$$\delta(\nabla_\nu g_{\mu\lambda}) = 0, \qquad (130)$$

onde obtem-se

$$\partial_\nu\delta g_{\mu\lambda} - (\delta g_{\mu\rho})\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda} - (\delta g_{\lambda\rho})\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu} - g_{\mu\rho}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda} - g_{\lambda\rho}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}.$$

Assim como montamos um sistema de três equações vistos na expressão (15), vamos montar um sistema com as permutações dos índices na expressão acima,

$$\begin{cases}\nabla_\nu(\delta g_{\mu\lambda}) = g_{\mu\rho}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda} + g_{\lambda\rho}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}\\ \nabla_\mu(\delta g_{\nu\lambda}) = g_{\nu\rho}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda} + g_{\lambda\rho}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}\\ \nabla_\lambda(\delta g_{\mu\nu}) = g_{\mu\rho}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu} + g_{\nu\rho}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}\end{cases}, \qquad (131)$$

e então somarmos as duas primeiras equações e subtraindo a última de forma que teremos,

$$\nabla_\nu(\delta g_{\mu\lambda}) + \nabla_\mu(\delta g_{\nu\lambda}) - \nabla_\lambda(\delta g_{\mu\nu}) = g_{\lambda\rho}(\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} + \delta\Gamma^{\rho}{}_{\nu\mu}) + g_{\mu\rho}(\delta\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda} - \delta\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu}) + g_{\nu\rho}(\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\lambda} - \delta\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}),$$

onde devemos usar a definição do tensor de torção (17), $\mathsf{T}^{\kappa}{}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\kappa}{}_{\lambda\mu} - \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda}$, de forma que obteremos

$$g_{\lambda\rho}[\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} + (\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} - \delta\mathsf{T}^{\rho}{}_{\mu\nu})] = \nabla_\nu(\delta g_{\mu\lambda}) + \nabla_\mu(\delta g_{\nu\lambda}) - \nabla_\lambda(\delta g_{\mu\nu}) + g_{\mu\rho}\delta\mathsf{T}^{\rho}{}_{\lambda\nu} + g_{\nu\rho}\delta\mathsf{T}^{\rho}{}_{\lambda\mu},$$

que resulta então na expressão

$$\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}[\nabla_\nu(\delta g_{\mu\lambda}) + \nabla_\mu(\delta g_{\nu\lambda}) - \nabla_\lambda(\delta g_{\mu\nu}] + \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}[g_{\mu\kappa}\delta\mathsf{T}^{\kappa}{}_{\lambda\nu} + g_{\nu\kappa}\delta\mathsf{T}^{\kappa}{}_{\lambda\mu} + g_{\lambda\kappa}\delta\mathsf{T}^{\kappa}{}_{\mu\nu}].$$

Agora vamos substituir essa expressão acima no segundo termo da variação da ação na equação (129),

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Omega d^4x\sqrt{-g}\;\mathfrak{S}^{\nu}{}_{\rho}{}^{\mu}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{4}\int_\Omega d^4x\sqrt{-g}\;\mathfrak{S}^{\nu}{}_{\rho}{}^{\mu}g^{\lambda\rho}[\nabla_\nu(\delta g_{\mu\lambda}) + \nabla_\mu(\delta g_{\nu\lambda}) - \nabla_\lambda(\delta g_{\mu\nu}]\\ &+\frac{1}{4}\int_\Omega d^4x\sqrt{-g}\;\mathfrak{S}^{\nu}{}_{\rho}{}^{\mu}g^{\lambda\rho}[g_{\mu\kappa}\delta\mathsf{T}^{\kappa}{}_{\lambda\nu} + g_{\nu\kappa}\delta\mathsf{T}^{\kappa}{}_{\lambda\mu} + g_{\lambda\kappa}\delta\mathsf{T}^{\kappa}{}_{\mu\nu}]\\ &= \frac{1}{4}\int_\Omega d^4x\sqrt{-g}\;\mathfrak{S}^{\nu\lambda\mu}[\nabla_\nu(\delta g_{\mu\lambda}) + \nabla_\mu(\delta g_{\nu\lambda}) - \nabla_\lambda(\delta g_{\mu\nu}]\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4}\int_{\Omega} d^4x\sqrt{-g}\,[\mathfrak{S}^{\nu\lambda}{}_{\kappa}\delta\mathsf{T}^{\kappa}{}_{\lambda\nu}+\mathfrak{S}_{\kappa}{}^{\lambda\mu}\delta\mathsf{T}^{\kappa}{}_{\lambda\mu}+\mathfrak{S}^{\nu}{}_{\kappa}{}^{\mu}\delta\mathsf{T}^{\kappa}{}_{\mu\nu}]. \tag{132}$$

A segunda integral acima pode ser reescrita como segue abaixo,

$$\frac{1}{4}\int_{\Omega} d^4x\sqrt{-g}\,[\mathfrak{S}^{\nu\lambda}{}_{\kappa}\delta\mathsf{T}^{\kappa}{}_{\lambda\nu}+\mathfrak{S}_{\kappa}{}^{\lambda\mu}\delta\mathsf{T}^{\kappa}{}_{\lambda\mu}+\mathfrak{S}^{\nu}{}_{\kappa}{}^{\mu}\delta\mathsf{T}^{\kappa}{}_{\mu\nu}]=\frac{1}{4}\int_{\Omega} d^4x\sqrt{-g}\,\mathfrak{S}^{\nu\rho\mu}(\delta\mathsf{T}_{\mu\rho\nu}+\delta\mathsf{T}_{\nu\rho\mu}+\delta\mathsf{T}_{\rho\mu\nu}),$$

onde o termo entre parêntesis é a variação do tensor de contorcão (22), e que pode ser finalizada na expressão abaixo,

$$\frac{1}{4}\int_{\Omega} d^4x\sqrt{-g}\,[\mathfrak{S}^{\nu\lambda}{}_{\kappa}\delta\mathsf{T}^{\kappa}{}_{\lambda\nu}+\mathfrak{S}_{\kappa}{}^{\lambda\mu}\delta\mathsf{T}^{\kappa}{}_{\lambda\mu}+\mathfrak{S}^{\nu}{}_{\kappa}{}^{\mu}\delta\mathsf{T}^{\kappa}{}_{\mu\nu}]=\frac{1}{4}\int_{\Omega} d^4x\sqrt{-g}\,\mathfrak{S}^{\nu\rho\mu}\delta K_{\rho\mu\nu}.$$

Agora vamos pegar o primeiro da primeira parte da integral $\mathfrak{S}^{\nu\lambda\mu}\nabla_{\nu}(\delta g_{\mu\lambda})$, para efetuarmos uma integral por partes. Vejamos que,

$$\frac{1}{4}\int_{\Omega} d^4x\sqrt{-g}\,\mathfrak{S}^{\nu\lambda\mu}\nabla_{\nu}(\delta g_{\mu\lambda})=\frac{1}{4}\int_{\Omega} d^4x\sqrt{-g}\,[\nabla_{\nu}(\mathfrak{S}^{\nu\lambda\mu}\delta g_{\mu\lambda})-(\nabla_{\nu}\mathfrak{S}^{\nu\lambda\mu})\delta g_{\mu\lambda}]. \tag{133}$$

Vamos usar o fato de que uma integral em uma divergência em uma Teoria de Campos Clássica num espaço-tempo com torção resulta na expressão (37) onde,

$$\int_{\Omega} d^4x\sqrt{-g}\,\nabla_{\mu}V^{\mu}=-\int_{\Omega} d^4x\sqrt{-g}\,\mathsf{T}_{\mu}V^{\mu}.$$

Usando esse resultado na integral (133) teremos

$$\frac{1}{4}\int_{\Omega} d^4x\sqrt{-g}\,\mathfrak{S}^{\nu\lambda\mu}\nabla_{\nu}(\delta g_{\mu\lambda})=\frac{1}{4}\int_{\Omega} d^4x\sqrt{-g}\,[-\mathsf{T}_{\nu}(\mathfrak{S}^{\nu\lambda\mu}\delta g_{\mu\lambda})-(\nabla_{\nu}\mathfrak{S}^{\nu\lambda\mu})\delta g_{\mu\lambda}]. \tag{134}$$

Usando esse resultado acima e substituindo na equação (132) teremos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\Omega} d^4x\sqrt{-g}\;\mathfrak{S}^{\nu}{}_{\rho}{}^{\mu}\delta\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}=&-\frac{1}{4}\int_{\Omega} d^4x\sqrt{-g}\,\nabla_{\lambda}(\mathfrak{S}^{\mu\nu\lambda}+\mathfrak{S}^{\lambda\mu\nu}-\mathfrak{S}^{\nu\lambda\mu})\delta g_{\mu\nu}\\ &-\frac{1}{4}\int_{\Omega} d^4x\sqrt{-g}\,\mathsf{T}_{\lambda}(\mathfrak{S}^{\mu\nu\lambda}+\mathfrak{S}^{\lambda\mu\nu}-\mathfrak{S}^{\nu\lambda\mu})\delta g_{\mu\nu}+\frac{1}{4}\int_{\Omega} d^4x\sqrt{-g}\,\mathfrak{S}^{\nu\rho\mu}\delta K_{\rho\mu\nu}.\end{aligned}$$

O segundo termo da integral acima se anula devido a antissimetria nos índices μ e ν na densidade de corrente de spin contraídos com a variação do tensor métrico simétrico. Voltando esses valores na equação (129) teremos,

$$\delta S = \frac{1}{2}\int_\Omega d^4x\sqrt{-g}\ \left[T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\nabla_\lambda(\mathfrak{S}^{\mu\nu\lambda} + \mathfrak{S}^{\lambda\mu\nu} - \mathfrak{S}^{\nu\lambda\mu})\right]\delta g_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\int_\Omega d^4x\sqrt{-g}\,\mathfrak{S}^{\nu\rho\mu}\delta K_{\rho\mu\nu}. \tag{135}$$

Então deve-se observar com atenção o termo entre colchetes como o tensor energia-momento simétrico de Belinfente-Rosenfeld,

$$\mathfrak{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\nabla_\lambda(\mathfrak{S}^{\mu\nu\lambda} + \mathfrak{S}^{\lambda\mu\nu} - \mathfrak{S}^{\nu\lambda\mu}) \tag{136}$$

para um espaço-tempo curvo. Comparando a equação acima com a equação do tensor de Belifante-Rosenfeld obtido na equação (59) através do teorema de Noether na Teoria Clássica de Campos em um espaço-tempo plano, vemos que o tensor densidade de corrente de spin é dado por:

$$\mathfrak{S}^{\lambda\mu\nu} = -iS^{\lambda\mu\nu}. \tag{137}$$

Com a equação (63) podemos identificar a densidade de corrente de spin como

$$\mathfrak{S}_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\,\bar{\psi}\left\{\gamma_\lambda, \Sigma_{\mu\nu}\right\}\psi, \qquad \text{ou ainda} \qquad \mathfrak{S}_{\lambda\mu\nu} = \frac{i}{8}\,\bar{\psi}\left\{\gamma_\lambda, [\gamma_\mu, \gamma_\nu]\right\}\psi. \tag{138}$$

Realizando os mesmos procedimentos de cálculo feitos na seção IV e substituindo a equação (128) na equação (136) obtemos que o tensor energia-momento simétrico para o campo espinorial é dado por:

$$\mathfrak{T}_{\mu\nu} = \frac{i}{4}\left[\bar{\psi}\gamma_\mu\nabla_\nu\psi + \bar{\psi}\gamma_\nu\nabla_\mu\psi - (\nabla_\mu\bar{\psi})\gamma_\nu\psi - (\nabla_\nu\bar{\psi})\gamma_\mu\psi\right]. \tag{139}$$

É esse tensor energia-momento que gera a curvatura do espaço-tempo, dado pela equação de campo (11), enfatizando que o tensor energia-momento acima contem a densidade de corrente de spin, conforme verificamos nos detalhes acima.

Agora vejamos como fica a segunda equação de movimento que relaciona o tensor densidade de corrente de spin com a torção no espaço-tempo. Uma variação na ação espinorial (118) em relação à conexão $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ irá resultar em:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S_M}{\delta\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}} &= \frac{\delta}{\delta\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}}\int_\Omega d^4x\ \det(e)\left\{\frac{i}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^\zeta\ e_\zeta{}^\mu\left(\partial_\mu + \frac{i}{2}\Gamma_{\delta\mu\epsilon}\Sigma^{\delta\epsilon}\right)\psi - e_\zeta{}^\mu\left(\partial_\mu\bar{\psi} - \frac{i}{2}\Gamma_{\delta\mu\epsilon}\bar{\psi}\,\Sigma^{\delta\epsilon}\right)\gamma^\zeta\psi\right] + m\bar{\psi}\psi\right\}\\
&= \left(\frac{i}{2}\right)^2\det(e)\ \left(\bar{\psi}\gamma^\zeta\frac{\delta\Gamma_{\delta\zeta\epsilon}}{\delta\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}}\Sigma^{\delta\epsilon}\psi + \bar{\psi}\frac{\delta\Gamma_{\delta\zeta\epsilon}}{\delta\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}}\Sigma^{\delta\epsilon}\gamma^\zeta\psi\right)\\
&= -\frac{\det(e)}{4}\ \bar{\psi}\left\{\gamma^\beta, \Sigma_\alpha{}^\gamma\right\}\psi,
\end{aligned}$$

agora comparando o resultado acima com a equação (138) obtemos então,

$$\frac{\delta S_M}{\delta\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}} = -\frac{\det(e)}{2}\mathfrak{S}^\beta{}_\alpha{}^\gamma, \tag{140}$$

ou expressando a densidade de corrente de spin como

$$\mathfrak{S}_{\beta\alpha\gamma} = -\frac{2}{\det(e)}\frac{\delta S_M}{\delta\Gamma^{\alpha\beta\gamma}}. \tag{141}$$

Devemos comparar a expressão acima com a definição na equação (49), onde temos a segunda equação de Einstein-Cartan, onde a torção do espaço-tempo tem origem na densidade de corrente de spin, dada pela equação abaixo em coordenadas ortornomais de Minkowski,

$$\mathsf{T}_{\alpha\gamma\beta} + \mathsf{T}_\gamma\eta_{\alpha\beta} - \mathsf{T}_\beta\eta_{\alpha\gamma} = 8\pi G\,\mathfrak{S}_{\alpha\beta\gamma}, \tag{142}$$

VII. CONCLUSÃO

A teoria de Einstein-Cartan-Sciama-Kibble descrita no espaço-tempo de Riemann-Cartan, U_4, é obtida pela Teoria de Gauge sob transformações locais de Poincaré no campo de matéria espinorial. Os constituintes fundamentais da matéria são os férmions (spin 1/2), de forma que a teoria de Einstein-Cartan-Sciama-Kibble é obtida ao se calibrar a ação do campo espinorial.

Sob invariância global de transformações de Poincaré obtem-se a conservação do tensor energia-momento e a conservação da corrente de momento angular. Vimos na seção IV que na ausência de gravidade, no espaço-tempo de Minkowski, através do teorema de Noether o tensor energia-momento é não simétrizado, sendo necessário os procedimentos de Belinfante-Rosenfeld que agrega ao tensor energia-momento as contribuições da densidade de corrente de spin do campo fermiônico, o que torna o tensor energia-momento simétrico. A necessidade de que o tensor energia-momento seja simétrico advém do requerimento no qual o tensor energia-momento de Hilbert ou tensor energia-momento métrico é simétrico por definição de acordo com a equação (47).

A ação espinorial sob transformações locais de Poincaré traz a interação com campos gravitacionais. O ponto de partida deve ser a ação (118), válida no espaço-tempo plano de Minkowski quando o campo de tétrade se reduz em ${e_\alpha}^\mu = {\delta_\alpha}^\mu$, ${\omega^\beta}_\nu = {\delta^\beta}_\nu$, $\det(e) = 1$ e a conexão $\Gamma_{\alpha\mu\beta} = 0$. O campo de tétrade ${e_\alpha}^\mu$ mapeia o espaço-tempo curvo, sistema não-inercial, em um espaço tempo plano localmente, sistema inercial, pela equação (95). Então um observador em um outro sistema de referências ao observar o campo espinorial, fará a observação por transformações locais de Poincaré observando o surgimento de dois campos de gauge: ${e_\alpha}^\mu$ e $\Gamma_{\alpha\mu\beta}$. A derivada covariante (113) é o gerador de translação do grupo de Poincaré $P(1,3)$ e $\Sigma_{\alpha\beta}$ são os geradores de rotações e boosts de Lorentz [3, 8]. A invariância local de Poincaré conduz à equação de campo (11) onde que da mesma forma que na Teoria da Relavidade Geral, o tensor energia-momento é a fonte da curvatura. A outra equação de campo obtida (142) mostra que a densidade de corrente de spin se torna a fonte de torção no espaço-tempo U_4.

Devemos observar que na Relatividade Geral de Einstein o tensor curvatura é calculado através de derivadas nas conexões que são somente os símbolos de Christoffel, o que resulta em equações diferenciais de segunda ordem no tensor métrico $g_{\mu\nu}$ implicando que a interação gravitacional se propaga no espaço-tempo riemanniano. O mesmo acaba acontecendo no espaço-tempo de Riemann-Cartan que pode ter torção não nula. Com isso em mente devemos observar que a equação (142) que relaciona torção com a densidade de corrente de spin não é uma equação diferencial como a equação de campo (11) mas ao invés disso é uma relação algébrica entre torção e a densidade de corrente de spin. Isso implica que a gravitação no espaço-tempo de Riemann-Cartan terá torção diferente de zero somente nas regiões onde houver a matéria fermiônica. A torção no espaço-tempo de Riemann-Cartan não pode ser dissociada da matéria fermiônica e consequentemente não pode se propagar no vácuo como uma onda de torção ou através de outra interação [9].

A teoria da gravitação de Einstein-Cartan no espaço-tempo com torção acrescenta à gravitação a existência de uma fraca interação entre o campo gravitacional e a matéria fermiônica. Cálculos e discussões tem mostrado que a densidade de matéria contendo fêrmions com momento angular intrínseco em unidades de $\frac{\hbar}{2}$, deve ser da ordem de 10^{47} g/cm^3 para elétrons e 10^{54} g/cm^3 para nêutrons, para que houvesse a possibilidade de estimar desvios significativos das predições da Relatividade Geral. Para se ter uma ideia dessas dimensões compare com a densidade de matéria de uma estrela de nêutrons que é da ordem de 10^{16} g/cm^3 [3]. Certamente para densidades tão altas assim, os efeitos esperados que a matéria fermiônica pode causar no espaço-tempo devem ser para condições extremas nos colapsos gravitacionais abordados na cosmologia e no próprio big bang. Existem também as expectativas de tais efeitos, spin-torção, ocorrerem na escala de Planck onde processos da gravitação quântica começam a ser relevantes [3, 9].

Apêndice A: Operador Curvatura de Gauge

Dado a derivada covariante (113) que deixa a ação de espinores (118) invariantes por mudanças de coordenadas e transformações locais de Lorentz, pode-se calcular o operador de curvatura de gauge dado por $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]$. Então,

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] = \nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\beta\nabla_\alpha = \nabla_\alpha\left[{e_\beta}^\nu\left(\partial_\nu + \frac{i}{2}{\Gamma^\gamma}_\mu{}^\delta\Sigma_{\gamma\delta}\right)\right] - \nabla_\beta\left[{e_\alpha}^\mu\left(\partial_\mu + \frac{i}{2}{\Gamma^\epsilon}_\mu{}^\zeta\Sigma_{\epsilon\zeta}\right)\right] \tag{A1}$$

e como $\nabla_\alpha = {e_\alpha}^\mu\nabla_\mu$ então,

$$\nabla_\alpha\nabla_\beta = {e_\alpha}^\mu\nabla_\mu({e_\beta}^\nu\nabla_\nu) = {e_\alpha}^\mu(\nabla_\mu {e_\beta}^\nu)\nabla_\nu + {e_\alpha}^\mu {e_\beta}^\nu\nabla_\mu\nabla_\nu. \tag{A2}$$

Vejamos primeiro o termo ${e_\alpha}^\mu(\nabla_\mu {e_\beta}^\nu)\nabla_\nu$ da expressão acima:

$${e_\alpha}^\mu\nabla_\mu {e_\beta}^\nu = {e_\alpha}^\mu\left(\partial_\mu + \frac{i}{2}{\Gamma^\epsilon}_\mu{}^\zeta\Sigma_{\epsilon\zeta}\right){e_\beta}^\nu = \partial_\alpha {e_\beta}^\nu + \frac{i}{2}{\Gamma^\epsilon}_\alpha{}^\zeta\Sigma_{\epsilon\zeta}\ {e_\beta}^\nu. \tag{A3}$$

Então o gerador de transformação de Lorentz do grupo $SO(3,1)$ está atuando no índice vetorial covariante β do vierbein $e_\beta{}^\nu$, logo:

$$\begin{aligned}\Sigma_{\gamma\delta}\ e_\beta{}^\nu \to [\Sigma_{\gamma\delta}]^\epsilon_\beta\ e_\epsilon{}^\nu &= i(\eta_{\delta\beta}\delta_\gamma{}^\epsilon - \eta_{\gamma\beta}\delta_\delta{}^\epsilon)e_\epsilon{}^\nu \\ &= i\eta_{\delta\beta}e_\gamma{}^\nu - i\eta_{\gamma\beta}e_\delta{}^\nu\end{aligned}$$

que resulta para a expressão (114):

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha e_\beta{}^\nu &= \partial_\alpha e_\beta{}^\nu + \frac{i}{2}\Gamma^\gamma{}_\alpha{}^\delta(i\eta_{\delta\beta}e_\gamma{}^\nu - i\eta_{\gamma\beta}e_\delta{}^\nu) \\ &= \partial_\alpha e_\beta{}^\nu - \frac{1}{2}\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}e_\gamma{}^\nu + \frac{1}{2}\Gamma_{\beta\alpha}{}^\delta e_\delta{}^\nu\end{aligned}$$

e como $\Gamma_{\beta\alpha\gamma} = -\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ então a expressão acima resulta em

$$\nabla_\alpha e_\beta{}^\nu = \partial_\alpha e_\beta{}^\nu - e_\gamma{}^\nu\,\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}. \tag{A4}$$

Agora podemos retornar ao cáculo da expressão (A2) onde tínhamos:

$$\nabla_\alpha\nabla_\beta = e_\alpha{}^\mu(\nabla_\mu e_\beta{}^\nu)\nabla_\nu + e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu\nabla_\mu\nabla_\nu$$

onde pode-se substituir o resultado (A4) no primeiro termo e também substituindo $\nabla_\nu = \omega^\gamma{}_\nu\nabla_\gamma$, obteremos:

$$\nabla_\alpha\nabla_\beta = e_\alpha{}^\mu(\partial_\mu e_\beta{}^\nu - e_\delta{}^\nu\,\Gamma^\delta{}_{\mu\beta})\omega^\gamma{}_\nu\nabla_\gamma + e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu\nabla_\mu\nabla_\nu \tag{A5}$$

onde devemos explicitar o termo $\nabla_\mu\nabla_\nu$, onde:

$$\nabla_\mu\nabla_\nu = \left(\partial_\mu + \frac{i}{2}\Gamma^{\gamma\delta}{}_\mu\Sigma_{\gamma\delta}\right)\left(\partial_\nu + \frac{i}{2}\Gamma^{\epsilon\zeta}{}_\nu\Sigma_{\epsilon\zeta}\right) = \partial_\mu\partial_\nu + \frac{i}{2}\partial_\mu\Gamma^{\epsilon\zeta}{}_\nu\Sigma_{\epsilon\zeta} + \frac{i}{2}\Gamma^{\epsilon\zeta}{}_\nu\Sigma_{\epsilon\zeta}\partial_\mu + \frac{i}{2}\Gamma^{\gamma\delta}{}_\mu\Sigma_{\gamma\delta}\partial_\nu - \frac{1}{4}\Gamma^{\gamma\delta}{}_\mu\Gamma^{\epsilon\zeta}{}_\nu\Sigma_{\gamma\delta}\Sigma_{\epsilon\zeta}$$

de forma então que a expressão (A5) se torna:

$$\nabla_\alpha\nabla_\beta = e_\alpha{}^\mu\omega^\gamma{}_\nu(\partial_\mu e_\beta{}^\nu - e_\delta{}^\nu\,\Gamma^\delta{}_{\mu\beta})\nabla_\gamma + e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu\big(\partial_\mu\partial_\nu + \frac{i}{2}\partial_\mu\Gamma^{\epsilon\zeta}{}_\nu\Sigma_{\epsilon\zeta} + \frac{i}{2}\Gamma^{\gamma\delta}{}_\nu\Sigma_{\gamma\delta}\partial_\mu + \frac{i}{2}\Gamma^{\gamma\delta}{}_\mu\Sigma_{\gamma\delta}\partial_\nu - \frac{1}{4}\Gamma^{\gamma\delta}{}_\mu\Gamma^{\epsilon\zeta}{}_\nu\Sigma_{\gamma\delta}\Sigma_{\epsilon\zeta}\big). \tag{A6}$$

E agora escrevemos o termo $\nabla_\beta\nabla_\alpha$ da expressão (A1), onde temos:

$$\nabla_\beta\nabla_\alpha = e_\beta{}^\mu\omega^\gamma{}_\nu(\partial_\mu e_\alpha{}^\nu - e_\delta{}^\nu\,\Gamma^\delta{}_{\mu\alpha})\nabla_\gamma + e_\beta{}^\mu e_\alpha{}^\nu\big(\partial_\mu\partial_\nu + \frac{i}{2}\partial_\mu\Gamma^{\epsilon\zeta}{}_\nu\Sigma_{\epsilon\zeta} + \frac{i}{2}\Gamma^{\gamma\delta}{}_\nu\Sigma_{\gamma\delta}\partial_\mu + \frac{i}{2}\Gamma^{\gamma\delta}{}_\mu\Sigma_{\gamma\delta}\partial_\nu - \frac{1}{4}\Gamma^{\gamma\delta}{}_\mu\Gamma^{\epsilon\zeta}{}_\nu\Sigma_{\gamma\delta}\Sigma_{\epsilon\zeta}\big). \tag{A7}$$

Ao se calcular o comutador $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]$ observamos que:

$$e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu\partial_\mu\partial_\nu - e_\beta{}^\mu e_\alpha{}^\nu\partial_\mu\partial_\nu = e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu\partial_\mu\partial_\nu - e_\alpha{}^\nu e_\beta{}^\mu\partial_\nu\partial_\mu = 0.$$

Temos também que os termos:

$$e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu\left(\frac{i}{2}\Gamma^{\gamma\delta}{}_\nu\Sigma_{\gamma\delta}\partial_\mu + \frac{i}{2}\Gamma^{\gamma\delta}{}_\mu\Sigma_{\gamma\delta}\partial_\nu\right) - e_\beta{}^\mu e_\alpha{}^\nu\left(\frac{i}{2}\Gamma^{\gamma\delta}{}_\nu\Sigma_{\gamma\delta}\partial_\mu + \frac{i}{2}\Gamma^{\gamma\delta}{}_\mu\Sigma_{\gamma\delta}\partial_\nu\right) = 0.$$

De forma então que o comutador se torna:

$$\begin{aligned}[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] &= e_\alpha{}^\mu\omega^\gamma{}_\nu(\partial_\mu e_\beta{}^\nu - e_\delta{}^\nu\,\Gamma^\delta{}_{\mu\beta})\nabla_\gamma \\ &- e_\beta{}^\mu\omega^\gamma{}_\nu(\partial_\mu e_\alpha{}^\nu - e_\delta{}^\nu\,\Gamma^\delta{}_{\mu\alpha})\nabla_\gamma \\ &+ e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu\left(\frac{i}{2}\partial_\mu\Gamma^{\epsilon\zeta}{}_\nu\Sigma_{\epsilon\zeta} - \frac{1}{4}\Gamma^{\gamma\delta}{}_\mu\Gamma^{\epsilon\zeta}{}_\nu\Sigma_{\gamma\delta}\Sigma_{\epsilon\zeta}\right)\end{aligned}$$

$$- e_\beta{}^\mu e_\alpha{}^\nu \left(\frac{i}{2}\partial_\mu \Gamma^{\epsilon\zeta}{}_\nu \Sigma_{\epsilon\zeta} - \frac{1}{4}\Gamma^{\gamma\delta}{}_\mu \Gamma^{\epsilon\zeta}{}_\nu \Sigma_{\gamma\delta}\Sigma_{\epsilon\zeta} \right)$$

que se torna:

$$\begin{aligned}[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] = {} & [\omega^\gamma{}_\nu (e_\alpha{}^\mu \partial_\mu e_\beta{}^\nu - e_\beta{}^\mu \partial_\mu e_\alpha{}^\nu) - e_\alpha{}^\mu \omega^\gamma{}_\nu e_\delta{}^\nu \, \Gamma^\delta{}_{\mu\beta} + e_\beta{}^\mu \omega^\gamma{}_\nu e_\delta{}^\nu \, \Gamma^\delta{}_{\mu\alpha}] \nabla_\gamma \\ & + e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu \left(\frac{i}{2}\partial_\mu \Gamma^{\gamma\delta}{}_\nu \Sigma_{\gamma\delta} - \frac{i}{2}\partial_\nu \Gamma^{\gamma\delta}{}_\mu \Sigma_{\gamma\delta} \right) - e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu \left(\frac{1}{4}\Gamma^{\gamma\delta}{}_\mu \Gamma^{\epsilon\zeta}{}_\nu \Sigma_{\gamma\delta}\Sigma_{\epsilon\zeta} - \frac{1}{4}\Gamma^{\gamma\delta}{}_\nu \Gamma^{\epsilon\zeta}{}_\mu \Sigma_{\gamma\delta}\Sigma_{\epsilon\zeta} \right)\end{aligned}$$

Agora usando a identidade $D_{\alpha\beta}{}^\gamma = \omega^\gamma{}_\nu (e_\alpha{}^\mu \partial_\mu e_\beta{}^\nu - e_\beta{}^\mu \partial_\mu e_\alpha{}^\nu)$ [12, 13] teremos então:

$$\begin{aligned}[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] = {} & [D_{\alpha\beta}{}^\gamma - \delta^\gamma{}_\delta \, \Gamma^\delta{}_{\alpha\beta} + \delta^\gamma{}_\delta \, \Gamma^\delta{}_{\beta\alpha}] \nabla_\gamma + e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu \left(\frac{i}{2}\partial_\mu \Gamma^{\gamma\delta}{}_\nu \Sigma_{\gamma\delta} - \frac{i}{2}\partial_\nu \Gamma^{\gamma\delta}{}_\mu \Sigma_{\gamma\delta} \right) \\ & - e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu \left(\frac{1}{4}\Gamma^{\gamma\delta}{}_\mu \Gamma^{\epsilon\zeta}{}_\nu \Sigma_{\gamma\delta}\Sigma_{\epsilon\zeta} - \frac{1}{4}\Gamma^{\gamma\delta}{}_\nu \Gamma^{\epsilon\zeta}{}_\mu \Sigma_{\gamma\delta}\Sigma_{\epsilon\zeta} \right)\end{aligned}$$

ou então:

$$\begin{aligned}[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] = {} & -(\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} - \Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha} - D_{\alpha\beta}{}^\gamma) \nabla_\gamma + e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu \left(\frac{i}{2}\partial_\mu \Gamma^{\gamma\delta}{}_\nu \Sigma_{\gamma\delta} - \frac{i}{2}\partial_\nu \Gamma^{\gamma\delta}{}_\mu \Sigma_{\gamma\delta} \right) \\ & - e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu \left(\frac{1}{4}\Gamma^{\gamma\delta}{}_\mu \Gamma^{\epsilon\zeta}{}_\nu \Sigma_{\gamma\delta}\Sigma_{\epsilon\zeta} - \frac{1}{4}\Gamma^{\gamma\delta}{}_\nu \Gamma^{\epsilon\zeta}{}_\mu \Sigma_{\gamma\delta}\Sigma_{\epsilon\zeta} \right)\end{aligned}$$

o primeiro termo entre parêntesis é a torção do espaço-tempo [12, 13]:

$$\mathsf{T}^\gamma{}_{\alpha\beta} = \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} - \Gamma^\gamma{}_{\beta\alpha} - D_{\alpha\beta}{}^\gamma,$$

então temos

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] = -\mathsf{T}^\gamma{}_{\alpha\beta} \nabla_\gamma + \frac{i}{2} e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu \left(\partial_\mu \Gamma^{\gamma\delta}{}_\nu - \partial_\nu \Gamma^{\gamma\delta}{}_\mu \right) \Sigma_{\gamma\delta} - \frac{1}{4} e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu \Gamma^{\gamma\delta}{}_\mu \Gamma^{\epsilon\zeta}{}_\nu \left(\Sigma_{\gamma\delta}\Sigma_{\epsilon\zeta} - \Sigma_{\epsilon\zeta}\Sigma_{\gamma\delta} \right)$$

Agora devemos usar a álgebra de Lie para os operadores $\Sigma_{\gamma\delta}$ no espaço tangente, partindo da expressão (78), onde temos que

$$i[\Sigma_{\gamma\delta}, \Sigma_{\epsilon\zeta}] = \eta_{\epsilon\delta}\Sigma_{\gamma\zeta} - \eta_{\epsilon\gamma}\Sigma_{\delta\zeta} + \eta_{\zeta\delta}\Sigma_{\epsilon\gamma} - \eta_{\zeta\gamma}\Sigma_{\epsilon\delta}, \quad \text{(A8)}$$

de forma que:

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] = -\mathsf{T}^\gamma{}_{\alpha\beta} \nabla_\gamma + \frac{i}{2} e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu \left(\partial_\mu \Gamma^\gamma{}_{\delta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\gamma{}_{\delta\mu} \right) \Sigma_\gamma{}^\delta + \frac{i}{4} e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu \Gamma^{\gamma\delta}{}_\mu \Gamma^{\epsilon\zeta}{}_\nu \left(\eta_{\epsilon\delta}\Sigma_{\gamma\zeta} - \eta_{\epsilon\gamma}\Sigma_{\delta\zeta} + \eta_{\zeta\delta}\Sigma_{\epsilon\gamma} - \eta_{\zeta\gamma}\Sigma_{\epsilon\delta} \right).$$

Vamos então simplificar o último termo da expressão acima,

$$\Gamma^{\gamma\delta}{}_\mu \Gamma^{\epsilon\zeta}{}_\nu \left(\eta_{\epsilon\delta}\Sigma_{\gamma\zeta} - \eta_{\epsilon\gamma}\Sigma_{\delta\zeta} + \eta_{\zeta\delta}\Sigma_{\epsilon\gamma} - \eta_{\zeta\gamma}\Sigma_{\epsilon\delta} \right) =$$

$$\Gamma^{\gamma}{}_{\epsilon\mu}\Gamma^{\epsilon}{}_{\zeta\nu}\Sigma_{\gamma}{}^{\zeta} - (-\Gamma^{\delta\gamma}{}_{\mu})\Gamma^{\epsilon}{}_{\zeta\nu}\eta_{\epsilon\gamma}\Sigma_{\delta}{}^{\zeta} + (-\Gamma^{\delta\gamma}{}_{\mu})\Gamma^{\epsilon\zeta}{}_{\nu}\eta_{\zeta\delta}\Sigma_{\epsilon\gamma} - \Gamma^{\gamma}{}_{\delta\mu}\Gamma^{\epsilon}{}_{\gamma\nu}\Sigma_{\epsilon}{}^{\delta} =$$
$$\Gamma^{\gamma}{}_{\epsilon\mu}\Gamma^{\epsilon}{}_{\zeta\nu}\Sigma_{\gamma}{}^{\zeta} + \Gamma^{\delta}{}_{\epsilon\mu}\Gamma^{\epsilon}{}_{\zeta\nu}\Sigma_{\delta}{}^{\zeta} - \Gamma^{\delta}{}_{\gamma\mu}\Gamma^{\epsilon}{}_{\delta\nu}\Sigma_{\epsilon}{}^{\gamma} - \Gamma^{\gamma}{}_{\delta\mu}\Gamma^{\epsilon}{}_{\gamma\nu}\Sigma_{\epsilon}{}^{\delta} =$$
$$2\Gamma^{\gamma}{}_{\delta\mu}\Gamma^{\delta}{}_{\epsilon\nu}\Sigma_{\gamma}{}^{\epsilon} - 2\Gamma^{\delta}{}_{\gamma\mu}\Gamma^{\epsilon}{}_{\delta\nu}\Sigma_{\epsilon}{}^{\gamma}$$

que substituindo para o comutador $[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]$, teremos:

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] = -\mathsf{T}^{\gamma}{}_{\alpha\beta}\nabla_\gamma + \frac{i}{2}e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu \left(\partial_\mu\Gamma^{\gamma}{}_{\delta\nu} - \partial_\nu\Gamma^{\gamma}{}_{\delta\mu}\right)\Sigma_\gamma{}^\delta + \frac{i}{2}e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu(\Gamma^{\gamma}{}_{\delta\mu}\Gamma^{\delta}{}_{\epsilon\nu}\Sigma_\gamma{}^\epsilon - \Gamma^{\delta}{}_{\epsilon\mu}\Gamma^{\gamma}{}_{\delta\nu}\Sigma_\gamma{}^\epsilon).$$

ou então,

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] = -\mathsf{T}^{\gamma}{}_{\alpha\beta}\nabla_\gamma + \frac{i}{2}e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu \left(\partial_\mu\Gamma^{\gamma}{}_{\delta\nu} - \partial_\nu\Gamma^{\gamma}{}_{\delta\mu} + \Gamma^{\gamma}{}_{\epsilon\mu}\Gamma^{\epsilon}{}_{\delta\nu} - \Gamma^{\epsilon}{}_{\delta\mu}\Gamma^{\gamma}{}_{\epsilon\nu}\right)\Sigma_\gamma{}^\delta \tag{A9}$$

o termo em parêntesis é o tensor de curavatura, onde

$$R^{\gamma}{}_{\delta\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^{\gamma}{}_{\delta\nu} - \partial_\nu\Gamma^{\gamma}{}_{\delta\mu} + \Gamma^{\gamma}{}_{\epsilon\mu}\Gamma^{\epsilon}{}_{\delta\nu} - \Gamma^{\epsilon}{}_{\delta\mu}\Gamma^{\gamma}{}_{\epsilon\nu}, \tag{A10}$$

Então finalmente temos:

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] = -\mathsf{T}^{\gamma}{}_{\alpha\beta}\nabla_\gamma + \frac{i}{2}e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu R^{\gamma}{}_{\delta\mu\nu}\Sigma_\gamma{}^\delta, \tag{A11}$$

ou então:

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] = -\mathsf{T}^{\gamma}{}_{\alpha\beta}\nabla_\gamma + \frac{i}{2}R^{\gamma}{}_{\delta\alpha\beta}\Sigma_\gamma{}^\delta. \tag{A12}$$

Se utilizarmos a operação acima em um vetor V^ϵ, devemos utilizar o gerador $\Sigma_\gamma{}^\delta$ aplicado ao vetor, de forma que teremos

$$\Sigma_\gamma{}^\delta V^\epsilon = i(\eta^{\delta\epsilon}\eta_{\gamma\zeta} - \delta_\gamma{}^\epsilon\delta_\zeta{}^\delta)V^\zeta,$$

e que substituindo na equação (A12) obtemos exatamente o mesmo valor da expressão (25).

[1] Herbert Goldstein, *Classical Mechanics*, second edition, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1980;

[2] Pierre Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, second edition, Frontiers in Physics, Westview Press, 1990;

[3] M. Blagojević and F. W. Hehl (eds.), *Gauge Theories of Gravitation*, a reader with commentaries, Imperial College Press, London, 2013;

[4] Ryoyu Utiyama, *Invariant theoretical interpretation of interaction*, Phys.Rev. **101**, 1597-1607, 1956;

[5] T.W.B. Kibble, *Lorentz invariance and the gravitational field*, J.Math.Phys., **2**, 212-221, 1961;

[6] D.W. Sciama, The analogy between charge and spin in General Relativity publicado em *Recent Developments in General Relativity*,Festschrift for Infeld (Pergamon Press, Oxford; PWN, Warsaw, 415-39, 1962;

[7] Friedrich W. Hehl, *Gauge Theory of Gravity and Spacetime*, Towards a Theory of Spacetime Theories, pp 145-169, Published in Einstein Studies book series, volume 13, arXiv:1204.3672 [gr-qc], 2017;

[8] Friedrich W. Hehl, *Four Lectures on Poincare Gauge Field Theory*, International School of Cosmology and Gravitation: Spin, Torsion, Rotation and Supergravity, 6-18 May 1979. Erice, Italy, Proceedings Contributions - Cosmology and Gravitation: Spin, Torsion, Rotation and Supergravity: proceedings. Edited by Peter G. Bergmann and Venzo de Sabbata. N.Y., Plenum Press, NATO Advanced Studies Institutes Series - Series B: Physics, v. 58, 1980;

[9] F.W. Hehl, P. Von Der Heyde, G.D. Kerlick, *General Relativity with Spin and Torsion: Foundations and Prospects*, Rev.Mod.Phys. 48, 393-416, 1976;

[10] P.I. Pronin, *Physical effects and measurability of spin-torsion interaction*, International School of Cosmology and Gravitation: 15th Course: Spin in Gravity: Is it Possible to Give an Experimental Basis to Torsion?,13-20 May 1997. Erice, Italy, Edited by P.G. Bergmann, V. de Sabbata, G.T. Gillies, P.I. Pronin. Singapore, World Scientific, The Science and Culture Series-Physics, 1998;

[11] Klaountia Pasmatsiou, Christos G. Tsagas, and John D. Barrow, *Kinematics of Einstein-Cartan universes*, Phys. Rev. D **95**, 104007, 2017;

[12] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*, Bristol,

UK: Hilger, Graduate student series in physics, 1990;

[13] Wytler Cordeiro dos Santos, *Non-coordinates basis in General Relativity and Cartan's structure equations*, e-Print: arXiv:1711.09503 [gr-qc], 2017;

[14] F.J. Belinfante, *On the current and the density of the electric charge, the energy, the linear momentum and the angular momentum of arbitrary fields*, Physica, **7**, Issue 5, pp 449-474, 1940;

[15] Steven Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Volume I Foundations*, Cambridge University Press, 1995;

[16] R.M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press (1984);

[17] C.N. Yang and R.L. Mills, *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance* , Phys. Rev., **96**, pp. 191-195, 1954.