e-Boletim de Física

International Centre for Physics
Instituto de Física, Universidade de Brasília
Ano VII, Novembro de 2018 • http://periodicos.unb.br/ojs311/index.php/e-bfis/index • eBFIS **7** 1601-1(2018)

A Relação Paradoxal entre a equação de Bernoulli e teoria cinética dos gases.

Leonardo S. F. Santos*

Departamento de Física, Universidade Federal de São Paulo - UNIFESP, Diadema, Brasil

Este trabalho apresenta uma relação paradoxal entre a equação de Bernoulli e a teoria cinétca dos gases. De acordo com a equação de Bernoulli, para um fluído incompressível, sem viscosidade e sem turbulência, a pressão cai com o crescimento da velocidade. Já a teoria cinética dos gases prevê que a pressão de um gás ideal aumenta com a velocidade. Uma vez que o gás ideal é um fluído, se as condições exigidas para a aplicação da equação de Bernoulli são cumpridas, há um paradoxo: a equação de Bernoulli e a teoria cinética dos gases preveem comportamentos opostos para a pressão com o aumento da velocidade. A solução do paradoxo é feita através da distinção entre as velocidades do gás ideal e das partículas. A pressão cresce com a velocidade quadrática média das partículas, mas diminui com a velocidade do gás ideal. Uma consequência da solução do paradoxo é a queda da velocidade do gás ideal com o aumento da média dos quadrados das velocidades randômicas das partículas e vice-versa.

I. INTRODUÇÃO

A equação de Bernoulli e a teoria cinética dos gases não fazem parte do currículo do ensino médio brasileiro [1]. No entanto, para muitos cursos de universidades brasileiras, estes temas fazem parte da ementa da disciplina intitulada "Física II" [2–6]. Em pelo menos três coleções de livros de Física Básica muito usadas nas universidades brasileiras, a equação de Bernoulli e a teoria cinética dos gases aparecem no volume II [7–9], o que deixa essa bibliografia adequada para os cursos de Física II. No entanto, os cursos e os livros didáticos não discutem a equação de Bernoulli e a teoria cinética dos gases em conjunto. Essa discussão é importante no estudo do fluxo de um gás ideal com densidade uniforme porque a equação de Bernoulli e a teoria cinética dos gases se aplicam a este sistema ao mesmo tempo.

A equação de Bernoulli descreve a relação entre pressão, velocidade e altura ao longo de uma linha de corrente de um fluído incompressível, sem viscosidade e sem turbulência [10–13].

$$\frac{\rho v^2}{2} + P + \rho g z = P_0 \tag{1}$$

onde ρ, v ,P, g, z e P_0 são respectivamente densidade, velocidade, pressão estática, aceleração da gravidade, altura e pressão de estagnação. Caso a vorticidade seja nula, a pressão de estagnação P_0 é a mesma para todas as linhas de corrente.

Todo gás é um fluído, mas a teoria cinética dos gases descreve o "gás ideal"como um conjunto de átomos isolados ou moléculas [14, 15]. As partículas estão em movimento aleatório e chocam-se com qualquer corpo imerso no gás. Por exemplo, um corpo sobre a Terra está imerso na atmosfera e as moléculas dos gases atmosféricos chocam-se com ele. Em um gás contido em um recipiente, as partículas ricocheteam as paredes do contingente. A força média exercida pelas partículas do gás no corpo imerso ou na parede contigente é proporcional à área. Na teoria cinética dos gases, a pressão é a divisão da força média do choque das partículas dividida pela área. Para um gás ideal em repouso, a relação entre a pressão e a média dos quadrados das velocidades das partículas é dada por [16]

$$P = \frac{\rho \overline{v^2}}{3} \tag{2}$$

Neste trabalho, será enunciado um paradoxo envolvendo a equação de Bernoulli e a teoria cinética dos gases. O objetivo deste trabalho é abordar um aspecto não intuitivo da equação de Bernoulli, a queda na pressão com o aumento da velocidade. No caso particular do gás ideal, a teoria cinética dos gases parece indicar que a pressão deveria aumentar com a velocidade, não diminuir.

As seções deste trabalho seguem os seguintes passos: apresentação da relação paradoxal, solução do paradoxo, consequência da solução e conclusão.

* leosioufi@gmail.com; permanent address: Rua Professor Arthur Riedel 275, CEP 09972-270, Diadema, SP, Brazil

II. APRESENTAÇÃO DO PARADOXO

As interpretações das relações altura-velocidade e altura-pressão na equação de Bernoulli são intuitivas. Para a pressão estática P constante, a equação de Bernoulli 1 prevê que a soma das densidades de energia cinética e potencial é uniforme e igual à $(P_0 - P)$. A relação altura-velocidade pode ser interpretada como uma consequência da lei da conservação da energia. Se a velocidade é constante na equação de Bernoulli 1, a relação altura-pressão coincide com a hidrostática. Quanto menor a altura z de uma determinada posição, maior a massa de fluído acima do ponto exercendo pressão estática P. No caso dos líquidos, é conveniente reescrever a equação de Bernoulli com a profundidade $h = -z$ onde a pressão na superfície $(h = 0)$ fica $P_0 - mv^2/2$. Já a relação pressão-velocidade não é intuitiva. Para explorar apenas esta última relação, é necessário fixar a altura z. Para este caso particular, basta substituir $z = 0$ na equação de 1.

$$\frac{\rho v^2}{2} + P = P_0 \tag{3}$$

Se o fluído está mais veloz, ele não exerceria uma pressão maior? A equação de Bernoulli acima prevê o inverso, a pressão diminui com o aumento da velocidade.

Para explorar ainda mais a relação velocidade-pressão, o problema pode ser estudado em um caso particular, o gás ideal. A escolha do gás ideal é motivada pela teoria cinética dos gases que relaciona pressão e velocidade diretamente. Uma objeção à esta escolha é a densidade variável do gás ideal, uma vez que a equação de Bernoulli pressupõe um fluído incompressível. Por isso, é necessário supor que o gás ideal é mantido incompressível. A restrição à densidade do gás ideal não é tão ruim quanto parece [20]. Existe uma equação análoga à de Bernoulli para um gás compressível, mas isso está além dos objetivos deste artigo [18].

Considerando um gás ideal fluindo sem variações de densidade e com variações de altura desprezíveis, as equação de Bernoulli na forma 3 e a teoria cinética dos gases podem ser aplicadas simultaneamnte. As equações 2 e 3 podem ser escritas na forma de afirmações:

- *a*) De acordo com a equação de Bernoulli, a pressão é uma função monotomicamente decrescente do quadrado da velocidade.

- *b*) De acordo com expressão da pressão da teoria cinética dos gases, a pressão é uma função monotomicamente crescente do quadrado da velocidade.

As afirmações acima são paradoxais. Quando o quadrado da velocidade cresce, a pressão diminui e aumenta de acordo com as afirmações a e b respectivamente. Uma função não pode ser monotomicamente crescente e decescente ao mesmo tempo.

Um caso particular da relação paradoxal entre as relações 3 e 2 é $v = 0$. A equação de Bernoulli 3 prevê a pressão máxima, $P = P_0$, enquanto a relação 2 implica em $P = 0$.

III. SOLUÇÃO DO PARADOXO

Os termos v^2 que aparecem nas duas parcelas não tem o mesmo significado. O termo v^2 da expressão 3 é o quadrado da velocidade do fluído. Já o mesmo termo v^2 da expressão 2 é o quadrado da velocidade das partículas para um gás ideal em repouso. Para a distinção entre as duas velocidades, serão usados os índices f e r para indicar respectivamente as velocidades do fluído e a randômica das partículas. As expressões 3 e 2 ficam reescritas como:

$$\frac{\rho v_f^2}{2} + P = P_0 \tag{4}$$

$$P = \frac{\rho \overline{v_r^2}}{3} \tag{5}$$

A expressão 5 é deduzida para o gás ideal em repouso, $v_f = 0$. No entanto, a expressão 5 pode ser generalizada para a pressão estática do gás em movimento que aparece na equação de Bernoulli. Se a velocidade do gás é não nula $(v_f \neq 0)$, o movimento das partículas torna-se a sobreposição entre dois movimentos, um ordenado com velocidade v_f e outro randômico. O movimento ordenado coincide com o movimento do gás como um todo, já o randômico tem velocidade nula em qualquer direção $(\overline{v_r} = 0)$, embora a média quadrática seja não nula $(\overline{v_r^2} \neq 0)$. A pressão estática segue a relação 5, não dependendo da velocidade do movimento ordenado v_f. Como em qualquer direção ortogonal à velocidade do gás só há movimento aleatório, a pressão estática também é denominada "pressão lateral" [19].

Enquanto a situação $v_f = 0$ é perfeitamente factível tanto na equação de Bernoulli quanto na teoria cinética dos gases, a velocidade média quadrática randômica nula das partículas $(\overline{v_r^2} = 0)$ viola as leis da Termodinâmica. No limite $\overline{v_r^2} \to 0$, a pressão 5 cai a zero. Pela equação de Clapeiron $(PV = nRT)$, a temperatura também iria a zero.

Com a distinção entre as velocidades do fluído e a randômica, as afirmações a e b ficam reescritas como.

- *a*) De acordo com a equação de Bernoulli , a pressão é uma função monotomicamente decrescente do quadrado da velocidade do fluído.

- *b*) De acordo com a teoria cinética dos gases, a pressão é uma função monotomicamente crescente da velocidade média quadrática randômica das partículas.

Não há paradoxo! As afirmações a e b reescritas não se contradizem. De acordo com a equação de Bernoulli, quando a velocidade do fluído ao quadrado cresce, a pressão diminui. Já para teoria cinética dos gases, se a média do quadrado da velocidade randômica das partículas aumenta, a pressão da expressão também aumenta.

IV. CONSEQUÊNCIA DA SOLUÇÃO DO PARADOXO

Desfeito o paradoxo, é possível extrair uma consequência das afirmações a e b:

- c) o quadrado da velocidade do fluído é uma função monotomicamente decrescente da velocidade média quadrática randômica das partículas.

Essa mesma afirmação pode ser deduzida a partir das equações 6 e 5.

$$\frac{\rho v_f^2}{2} + \frac{\rho \overline{v_r^2}}{3} = P_0 \tag{6}$$

A solução do paradoxo resulta em uma implicação da equação de Bernoulli em escala atômica-molecular. O crescimento da velocidade quadrática do fluído implica em uma queda na média da velocidade quadrática randômica e vice-versa. Como a pressão é proporcional à média da velocidade quadrática randômica, o aumento na velocidade do gás corresponde à uma queda na pressão.

V. CONCLUSÃO

A aparente relação paradoxal entre pressão e velocidade na equação de Bernoulli e na teoria cinética dos gases é consequência da falta de rigor na linguagem da Física.

Uma forma de contextualização da aparente contradição na relação pressão-velocidade é a duplicidade na descrição do gás ideal. A equação de Bernoulli e toda a Mecânica dos Fluídos está edificada na hipótese do contínuo [20], enquanto a teoria cinética dos gases descreve um conjunto de partículas. Embora a continuidade do fluído possa ser vista como consequência do limite termodinâmico, o movimento das partículas individuais é diferente do conjunto das partículas como um todo. Um meio interessante de conciliar as descrições do gás ideal pela teoria cinética dos gases e pela equação de Bernoulli é a simulação computacional [21].

O paradoxo apresentado neste trabalho também pode ser inserido em um amplo contexto onde a equação de Bernoulli é mal interpretada [22]. Há pesquisas apontando falhas na interpretação da equação de Bernoulli na diferença de pressão entre as partes supeiore inferior das asas de avião [23–25], no efeito Coanda [26], na relação entre pressão e densidade de energia [27] e até mesmo na derivação deste princípio [28].

O paradoxo apresentado neste trabalho e sua solução podem ser generalizados para o caso de líquidos. O aumento da velocidade do fluído corresponde a uma queda na pressão e na velocidade média quadrática randômica das partículas. No entanto, a relação da pressão com a velocidade das partículas para fluídos não gasosos envolve expressões relacionadas a teoria cinética dos líquidos e de fluídos em geral [29], o que está além dos objetivos deste trabalho.

[1] Parametros Curriculares Nacionais para o ensino médio. Disponível em `<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>`

[2] Ementa de Física II da USP: `<https://disciplinas.stoa.usp.br/course/view.php?id=7661>`

[3] Ementa de Física II da UNICAMP:`<http://univesptv.cmais.com.br/fisica-ii>`

[4] Ementa de Física II da UNESP: `<http://www.feis.unesp.br/Home/departamentos/fisicaequimica/ementas-planosdeensino/0729---fundamentos-fisica-ii---ezequiel.pdf>`

[5] Ementa de Física II da UFRJ: `<http://fisica2.if.ufrj.br/ementa.html>`

[6] Ementa de Física II da UFRJ: `<https://colgrad.ufmg.br/engagamb/engagamb/home/O-Curso/Matriz-Curricular-e-Ementas/Ementa-Fisica-II>`

[7] Fundamentos da Física, Vol 2, Gravitação, Ondas, Termodinâmica - 10^a ed.- Halliday, David / Walker, Jearl / Resnick, Robert, Ed.: LTC;

[8] Princípios de Física Vol. 2 - Oscilações, Ondas e Termodinâmica - 5^a Ed. 2014 Serway,Raymond A. / Jewett Jr.,John W. Ed.:Cengage Learning;

[9] References Curso de Física 2- Fluídos, Oscilações e Ondas, Calor, 3^a Ed. 2010 Nussenzveig, H. Moyses, Ed. Edgard Blucher;

[10] P. Fife, *A Gentle Introduction to the Physics and Mathematics of Incompressible Flow Course Notes, Fall* 2000. Nestas notas de aula, a equação de Bernoulli é derivada nas páginas $14 - 15$. Disponível online em `<http://www.math.utah.edu/~fife/gentleb.pdf>`

[11] J. Braithwaite, *An Introduction to Hydrodynamics.*Nestas notas de aula, a equação de Bernoulli é derivada nas páginas $8 - 10$. Disponível online em `<http://elibrary.bsu.az/books_$400\%$$5CN$_$224$.pdf>`

[12] J. M. Macdough, *Lectures in elementaryy Fluid Dynamics: Physics, Mathematics and Applications* Neste livro a equação de Bernoulli aparece como um caso particular da equação de Navier-Stokes' nas páginas $109-116$. Disponível online em `<http://www.engr.uky.edu/~acfd/me330-lctrs.pdf>`

[13] A equação de Bernoulli aparece como "princípio de Bernoulli"entre as páginas 530 até 535 da referência [8]. A expressão explícita da equação de Bernoulli está na página 531.

[14] T. I. Gombosi, *Gaskinetic Theory* (Cambridge University Press, 1994). O livro inteiro é o desenvolvimento completo e detalhado da teoria cinética dos gases.

[15] A teoria cinética dos gases ocupa um capítulo inteiro da página 555 até 580 da referência [8].

[16] A relação entre a pressão e a velocidade das partículas aparece na página 573 da referência [8] na forma $P = (2/3)(N/V)m\overline{v^2}/2$. Substituindo $\rho = (N/V)m$ na expressão anterior, chega-se à forma 2.

[17] Citando diretamente a página 29 do livro [12]: "For example, we will later distinguish between compressible and incompressible flows, and we will see that even though gases are generally very compressible substances, it is often very accurate to treat the flow of gases as incompressible."

[18] Y. Nakayama, R. F. Boucher, *Introduction of Fluid Mechanics* (Planta Tree, 1999) Ver a equação 13.35 na página 225. O capítulo "Flow of a compressible fluid"desenvolve expressões análogas à equação de Bernoulli para um gás ideal não uniforme.

[19] H.S. Badeer, "Flowtube misnomers: Time to rectify", Physics Teacher, **32** 426-427 (1994)

[20] A hipótese do contínuo é discutida em pormenores nas páginas $11-13$ do livro [12].

[21] K. Misaiko and J. Vesenka "Connecting the Dots: Links between Kinetic Theory and Bernoulli's Principle", Physics Education Research Conference, Part of the PER Conference series Portland, 257-260 (2013)

[22] R.P. Bauman, R. Schwaneberg, "Interpretation of Bernoulli's Equation", Physics Teacher, **32**, 478-88, (1994).

[23] How do wings work? Holger Babinsky, Physics Education, Volume 38, Number 6, 2003

[24] What supports an aeroplane? Force, momentum, energy and power in flight David Robertson 2014 Physics Education 49, 75

[25] T. López-Arias, L. M. Gratton, G. Zendri, S. Oss , "Using jets of air to teach fluid dynamics", Physics Education, **46**, 373-377, (2011)

[26] Bernoulli? Perhaps, but What About Viscosity? Peter Eastwell, The Science Education Review, 6(1), 2007.

[27] G. A. Lindsay, "Pressure Energy and Bernoulli's Principle", American Journal of Physics, **20**(2), 86–88 (1952).

[28] Para uma discussão mais rigorosa da dedução da equação de Bernoulli, indicamos: Classic Bernoulli's principle derivation and its working hypotheses Edson R Marciotto 2016, Physics Education 51, 045005.

[29] D. Tong, *Kinetic Theory* 2012 Avaliable online `<http://www.cmls.polytechnique.fr/perso/golse/Surveys/FGHGradLect.pdf>`