e-Boletim de Física

International Centre for Physics
Instituto de Física, Universidade de Brasília
Ano VI, Agosto de 2018 • http://periodicos.unb.br/ojs311/index.php/e-bfis/index • eBFIS **6** 2102-1(2018)

Álgebra linear, do concreto para o abstrato

T.S. Evangelista* and T.C. Tognetti†
Universidade de Brasília, Faculdade Gama, Gama, Brasília, DF.

O ensino da Álgebra Linear passou por importantes mudanças ao longo dos anos. Todavia, essas modificações não foram suficientes para suprir as dificuldades enfrentadas pelos alunos.. Vários são os fatores que dificultam a aprendizagem. Dentre eles, podemos destacar o elevado nível de abstração dos assuntos são abordados, o que dificulta, em boa parte dos estudantes, o entendimento de conceitos fundamentais para futura utilização em outras disciplinas. Dessa forma, o objetivo desse trabalho é relatar a experiência de um projeto desenvolvido em sala de aula que abordou a metodologia de resolução de problemas partindo do concreto para o abstrato, de alguns tópicos de Álgebra Linear.

I. INTRODUÇÃO

O ensino da Álgebra Linear passou por transformações ao longo dos anos, principalmente na década de 90 (Celestino, 2000) e é um ramo da Matemática muito importante e de grande aplicabilidade. Os seus conteúdos relacionam problemas de diversas áreas de conhecimento. Porém, o ensino e a aprendizagem dessa disciplina são considerados, por docentes e discentes, como sendo uma experiência difícil devido às dificuldades manifestadas pelos estudantes (Dorier, 1998; Hillel, 2000). Em geral, é a primeira disciplina que os alunos têm contato com uma maior estrutura axiomática exigindo elevado nível de abstração e rigor matemático. Assim, o grau de formalismo não permite que os universitários estabeleçam conexões com o que já sabem de matemática; e a abordagem intuitiva provoca nos alunos o sentimento de estarem aprendendo um tema que não possui significado e sem aplicabilidade em situações cotidianas. Cabe ressaltar que a disciplina de Álgebra Linear faz parte da grade curricular da grande maioria dos cursos universitários das áreas de exatas e engenharias, sobretudo nos cursos de engenharia eletrônica, engenharia elétrica, matemática, física, estatística, computação, etc.

Segundo pensamento deweyano (Dewey, 1959), o aprendizado só ocorre quando há uma situação de problema real para se resolver. Com base nos conhecimentos teóricos e na experiência prática, é possível solucionar o problema passando por cinco fases: caracterização da situação problemática, desenvolvimento da sugestão, observação e experiência, reelaboração intelectual e verificação dos resultados. Assim, a partir de seus conhecimentos e experiências o professor auxilia os alunos a "aprender a pensar" relacionando a prática com a teoria, ou seja, do concreto para o abstrato.

Por conta disso, Uhlig (2002) analisou a exploração intuitiva e geométrica de alguns tópicos da álgebra linear antes da teoria formal ser introduzida, utilizando diário de bordo, *blogs*, como meio de envolver os alunos com os conceitos dessa disciplina.

E para responder a pergunta de praxe: Para que serve o conteúdo que estou estudando? Motta (2003) replicou essa indagação levando os alunos para a cozinha observar os movimentos de um alimento durante o processo de fritura, executam-se rotações para que todos os lados fiquem igualmente fritos. Mesmo que aconteça rotações sobre os mesmos eixos, o corpo será rotacionado de forma diferente se a ordem dos eixos for alterada. Observe que ao fritar um objeto com três dimensões, abordaram-se temas como: transformações lineares no espaço, rotações e comutatividade de matrizes. Nessa aplicação, as rotações de eixo não são comutáveis. Malajovich (2010) defendeu que ninguém é capaz de aprender alguma coisa sem experiência e informação sobre ela.

Dessa forma, abordou em seu livro diversas práticas cotidianas da álgebra linear, tais como: desempenho do algoritmo de busca do Google, funcionamento dos *video games* tridimensionais, performance da televisão digital, entre outros.

A fim de trazer algumas contribuições para esse tema, neste artigo, apresentamos um relato de uma experiência em sala de aula que utilizou resolução de problemas como ferramenta de aplicação para abordar o concreto para o abstrato no ensino de alguns tópicos de Álgebra Linear.

* tatilista@gmail.com
† tais.caliero@gmail.com

II. METODOLOGIA DA PESQUISA: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O ensino da matemática por meio da resolução de problemas vem ao encontro das necessidades de tornar a matemática aplicada e significativa ao contexto do ensino e aprendizagem. De acordo com Polya (1994), o problema desafia a curiosidade e contextualiza uma situação-problema no desenvolvimento de uma atividade didática.

No final da década de 1940, surgiram os primeiros trabalhos significativos em resolução de problemas. Segundo Onuchic (1999):

> Em 1948, o trabalho desenvolvido por Herbert F. Spitzer, em aritméticabásica, nos Estados Unidos, se apoiava numa aprendizagem com compreensão, sempre a partir de situações-problemas e, em 1964, no Brasil, o professor Luis Alberto S. Brasil defendia um ensino de matemática a partir de um problema gerador de novos conceitos e novos conteúdos (1999, p.202).

No período de 1960 e 1970, o ensino da matemática era abordado de maneira abstrata e precisa. Nessa época, houve uma preocupação com a didática em sala de aula e não eram enfatizadas no processo ensino-aprendizagem aplicações da matemática na resoluções de problema, bem como o conceito de interdisciplinaridade.

Finalmente, no final da década de 1970, iniciou-se o ensino da matemática utilizando esse método que ganhou visibilidade entre os educadores. Observou-se, claramente, uma nova abordagem da matemática por intermédio dessa metodologia, promovendo a criatividade e a espontaneidade. De acordo com Schroeder e Lester (1989), a resolução de problemas coloca o foco da atenção dos estudantes sobre as ideias e sobre o "dar sentido às coisas".

Nesse trabalho, procurou-se abordar problemas de aplicação, os quais retratam situações concretas, possibilitando o discente compreender conceitos abstratos da matemática envolvida com maio entusiasmo. Dessa forma, notamos que o concreto e o abstrato, são, portanto, elementos indissociáveis para o conhecimento humano.

A seguir, apresentaremos alguns dos problemas desenvolvidos em sala de aula.

III. A PRÁTICA E OS RELATOS DOS RESULTADOS

Os tópicos concretos voltados para alguns temas de álgebra linear fazem parte de um projeto de tutoria executado no 1ª/2016 para os cursos de Engenharia da UnB campus Gama. Durante o período de execução desse projeto, eram ofertadas duas turmas de Introdução à Álgebra Linear (IAL) com 120 alunos cada. Somente uma turma participou desse trabalho, essa opção nos proporcionou fazer uma análise estatística do desempenho acadêmico dessas turmas. Enfatiza-se que o objetivo principal deste trabalho é a apresentação dos relatos das experiências didáticas utilizadas no processo ensino-aprendizagem de Álgebra Linear. Sendo assim, um outro estudo sobre uma análise estatística, tanto descritiva como inferencial, ficará como perspectiva.

Todas as aulas foram planejadas com o objetivo de valorizar a participação dos alunos, buscando torná-los agentes da construção do seu próprio conhecimentos e assim fazer a conectividade da aplicabilidade real com a teoria abstrata estudada. Assim, apresentaremos o desenvolvimento de quatro aulas deste projeto com seus objetivos, atividades e comentários.

A. Aula 1: Criptografia - um olhar matricial

Objetivo: Despertar o interesse dos alunos para o conceito de inversão matricial.

Atividade: Iniciamos a aula filmes que envolviam tentativas de desvendar códigos secretos, tais como o livro O Código da Vinci de Dan Drown publicado em 2005 e o filme O jogo da imitação lançado em 2014. Após a leitura dessas resenhas, foram feitos questionamentos de quais ferramentas matemáticas seriam precisos para codificar e decodificar uma mensagem. Em seguida, os alunos foram organizados em grupos de quatro pessoas e propomos o seguinte problema:

João passou a seguinte mensagem a Maria:

33, 83, 145, 59, 27, 87, 115, 75, 95, 145, 47, 17, 94, 50, 63, 82, 25, 93, 83, 93, 83, 215, 377, 157, 68, 225, 302, 195, 247, 377, 124, 45, 241, 129, 165, 214, 65, 242, 221, 247.

Sabe-se que a matriz utilizada para criptografar a mensagem foi $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$**. Qual foi a mensagem?**

Em seguida, os alunos foram orientados a aplicar a proposta de resolução de problema sugerida por Polya (1994): compreensão do problema, construção de uma estratégia de resolução, execução da estratégia e revisão da solução.

Comentários: A introdução da aula, por meio das sinopses despertou o interesse dos discentes para a atividade. A grande maioria entendeu que a primeira estratégia de resolução do problema era de combinar o código secreto entre o remetente e destinatário. Assim, que cada grupo de alunos criou a tabela de código alfanumérico. Logo após, os alunos foram questionados sobre a importância de criar na tabela um representante para o espaço entre as palavras. Então, os alunos discutiram acerca do problema de como representar a mensagem fornecida na forma matricial e as várias formas de calcular a inversa da matriz A. Nesse ponto, a maioria dos alunos não teve problema com a inversão da matriz, alguns sugeriram usar a relação de matriz adjunta com o seu determinante outros preferiram trabalhar com a definição Por fim, nenhum estudante apresentou dificuldades de efetuar uma multiplicação matricial. No final, todos estavam curiosos para descobrir a mensagem de cada grupo, uma vez que adotaram códigos diferentes. A atividade foi muito produtiva, pois os alunos perceberam que a matriz codificadora A precisa possuir determinante não nulo (condição para existir inversa de uma matriz).

B. Aula 2: Balanceamento químico

Objetivo: Aplicação do conceito de resolução de um sistema linear indeterminado.

Atividade: Iniciou-se a aula com um debate do processo de fotossíntese. O professor indagou os alunos como era esse método. Os alunos destacaram a grande importância do Sol como fator essencial para a produção de oxigênio pelas plantas. Novamente, os alunos foram organizados em grupos para resolver o seguinte problema:

A fotossíntese é o processo através do qual as plantas e alguns outros organismos transformam energia luminosa em energia química processando o dióxido de carbono (CO_2), água (H_2O) e minerais em compostos orgânicos e produzindo oxigênio gasoso (O_2). Determine a equação geral desse balanceamento químico.

Comentários: Os alunos mostraram conhecimento que em uma reação química a soma das massas das substâncias reagentes é igual à soma das massas dos produtos da reação. Eles experienciaram dificuldade em montar a fórmula química do composto orgânico ($C_6H_{12}O_6$). Começaram a resolver o problema pelo método da tentativa e erro, mas não foi muito eficaz na resolução. Assim, começaram a discussão do problema e observaram que a melhor maneira era montar um sistema linear de acordo com cada componente orgânico da equação química (carbono, oxigênio e hidrogênio). Resultando em um sistema de três variáveis e quatro equações. Nessa etapa, a maioria teve problemas em resolver um sistema linear indeterminado utilizando o conceito de escalonamento. O professor interveio explicando a solução. Essa atividade foi muito eficaz pois os alunos perceberam a importância da resolução de um sistema linear nesse processo.

C. Aula 3: Conjunto das cores primárias

Objetivo: Verificar alguns axiomas de espaço vetorial.

Atividade: Introduziu-se a aula recordando as cores primárias, secundárias e terciárias e, suas posições no círculo cromático, utilizando como material de apoio tintas guaches. Em seguida, foi introduzido o seguinte problema:

É possível criar um conjunto de cores primárias em que se mantêm a comutatividade, a associatividade e a existência do complementar entre as cores?

Comentários: Os estudantes ficaram animados em tornar a aula de matemática em educação artística. Eles captaram que a ideia da resolução do problema era entender os termos: comutatividade, associatividade e complementar. Nenhum aluno demonstrou dificuldade nesses conceitos e manipularam as cores corretamente e verificaram as propriedades com sucesso. Essa aplicação proporcionou uma maneira muito clara e fácil de entender os axiomas de espaço vetorial, cujo tema a maioria dos alunos achavam muito difícil devido às definições abstratas.

D. Aula 4: Rotações de imagens

Objetivo: Estudar transformações lineares.

Atividade: Começou-se a aula mostrando aos alunos a seguinte imagem:

Figura 1: Careca ou cabeludo?
Fonte: `http://www.oqueeoquee.com/imagens-ambiguas/`

E fez-se a seguinte pergunta:

O que acontece quando você rotaciona a figura 180 graus? Como fazer essa rotação?

Comentários: Os discentes se divertiram em virar a figura de cabeça para baixo. E a grande parte, deduziram que a solução do problema era aplicar uma função com uma característica "especial", mas não conseguiram deduzir essa propriedade. O docente interveio nessa aplicação explicando a teoria. Foi uma atividade relevante, pois os alunos notaram a importância do conceito de transformação linear.

IV. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com os resultados obtidos no presente trabalho, foi possível observar que, tanto por parte dos alunos, quanto pelos docentes, o uso de aplicações concretas no processo ensino e aprendizagem da disciplina da Álgebra Linear proporcionaram momentos de descontração, despertando o interesse dos alunos, o que possibilitou um melhor aprendizado dessa matéria. A abordagem apresentada tornou mais fácil ao estudante criar associações e generalizações dessas atividades com os conteúdos algébricos relacionados.

A observação do comportamento dos alunos frente aos problemas propostos, e também do comprometimento por eles demonstrado na procura por solução, corrobora os dizeres de Dewey (1959) em relação ao fato da aprendizagem ocorrer efetivamente somente nos casos em que há um problema real para se resolver. No ensino de matemática, as práticas reais propiciam um ambiente no qual o conteúdo deixa de possuir um caráter estritamente abstrato e passa a ser visto como algo rotineiro, aplicável no dia a dia e de fácil acesso.

Neste trabalho, mediante a utilização das atividades concretas, constatamos que os discentes demonstraram maior interesse e motivação no estudo de conteúdos da Álgebra Linear. A opinião geral dos alunos enfatizou que essas atividades permitiram um aprendizado mais fácil, dinâmico e prazeroso. A estatística comparativa do índice de aprovação das turmas de IAL que participaram e não participaram do projeto foram 67% e 37%, respectivamente. Como perspectiva, almejamos ampliar o alcance deste trabalho, desenvolvendo outros problemas concretos para estudar outras teorias abstratas da matemática; bem como replicá-lo em mais turmas a fim de aglutinar dados estatísticos para a realização de uma análise descritiva e inferencial aprofundada.

CELESTINO, M. R. (2000). Ensino-aprendizagem da álgebra linear: as pesquisas brasileiras na década de 90. Brasil: PUC-São Paulo.

DEWEY, J. (1959). Democracia e educação: introdução à filosofia da educação. 3a. ed. São Paulo: Nacional. Tradução de Godofredo Rangel e Anísio Teixeira.

DORIER, J. L. (1998). État de l'art de la recherche en didactique - À propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire. França: Recherches in Didactique des Mathématiques, vol18, n 2, p. 193-230.

HILLEL, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In: J. L. Dorier (d,), On the teaching of linear algebra (p. 191-207). Kluwer Academic Publishers.

MALAJOVICH, G. (2010). Álgebra linear. 3a. ed, Brasil: UFRJ.

MOTTA, V. S. (2003). Álgebra linear na cozinha, Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia - Cobenge.

ONUCHIC, L.R. (1999). Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: Bicudo, M.A.R. (org): Pesquisa em educação matemática: Concepções e perspectivas. São Paulo: Edunesp, p. 199-218.

POLYA, G. (1994). A arte de resolver problemas: um enfoque do método matemático. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro.

SCHROEDER, T.L; Lester Jr, F.K. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In: Trafton, P. R.; Shulte, A. P. (ed). New directions for elementary school mathematics. Reston: NCTM, p. 31-42.

UHLIG, F. (2002). The Role of Proof in Comprehending and Teaching Elementary Linear Algebra. Educational Studies in Mathematics, 50, p. 335-346.