SIMETRIA E MÚSICA

Luciana Gastaldi Sardinha Souza
Universidade Estadual de Londrina – UEL
lucianagastaldi@uel.br

Tadeu Moraes Taffarello
Universidade Estadual de Londrina – UEL
tadeutaffarello@uel.br

Resumo: O presente texto se propõe a apresentar e analisar os tipos de simetria passíveis de serem utilizados em música, visto que esta pode ser interpretada como em um espaço bidimensional, levando em consideração as dimensões tempo (horizontal) e altura de notas (vertical). São apresentadas as simetrias de reflexão vertical e horizontal e de rotação. É explicada a não procedência do termo simetria de translação em música. São apresentados vários exemplos dessas simetrias em composições de Haydn, Hindemith, Bartók e Kurtág.

Palavras-chave*: simetria; música; Bartók.*

SYMMETRY AND MUSIC

bstract: This paper aims to present and analyze the types of symmetry, which can be used in music, since it can be interpreted as in a two-dimensional space, taking into account time (horizontal) and pitch (vertical) dimensions. The vertical and horizontal reflections and rotation symmetries are shown. It explains why the translational symmetry cannot be used in music. Several examples of such symmetries in compositions of Haydn, Hindemith, Bartók and Kurtág are presented.

Keywords*: simmetry; music; Bartók.*

Luciana Gastaldi e Tadeu Taffarello.
Simetria e Música. *Música em Contexto,* Brasília, Nº. 1 (2013): 51-74

Introdução

Há uma tendência natural em considerarem-se figuras simétricas apenas as que permanecem invariáveis após serem refletidas ao redor de um eixo, como, por exemplo, a figura de uma borboleta sendo refletida em relação ao eixo que passa pelo meio de seu corpo (figura 1). Musicalmente, isso seria equivalente a uma melodia cuja segunda metade fosse exatamente o movimento retrógrado da primeira metade.

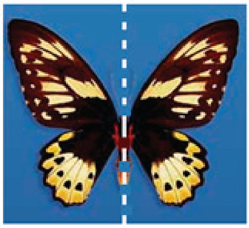

Figura 1 – Figura de uma borboleta

No entanto, a geometria nos indica que existem outras transformações do plano que deixam a figura invariante. Visto que a música, em sua representação na partitura, pode ser interpretada como em um espaço bidimensional, em um plano que considere as dimensões tempo (horizontal) e altura de notas (vertical), o presente artigo propõe-se a analisar os tipos de simetria existentes – de reflexão horizontal e vertical, de translação e de rotação –, destacando aqueles passíveis de serem utilizados musicalmente.

1 Sobre simetria

Antes de definir simetria, faz-se necessário primeiramente definir isometria, porque a simetria é um tipo especial de isometria.

Definição $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma **isometria (de** $\mathbb{R}^2$) se

$$|T(z) - T(w)| = |z - w|$$

quaisquer que sejam z e w de $\mathbb{R}^2$. A figura 2, a seguir, ilustra esta função.

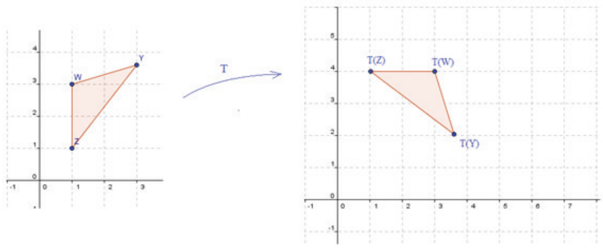

Figura 2 – Exemplo de uma isometria

Observa-se que a isometria transforma a figura em uma outra de tal forma que a distância entre quaisquer de seus pontos é preservada. Na figura anterior, percebe-se, por exemplo, que o ponto z é transformado em T(z) e o ponto w, em T(w), de tal maneira que a distância entre z e w é preservada. Matematicamente, dizemos que |z – w| (a distância entre z e w) é igual à |T(z) – T(w)| (distância entre T(z) e T(w)). Tratam-se de isometrias as translações, rotações e reflexões de figuras planas.

De posse dessa definição, pode-se agora definir simetria.

Uma simetria de uma figura F de um plano é definida como uma isometria $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que deixa a figura invariante,[1] isto é,

$$T(F) = F.$$

Ou seja, uma simetria é uma isometria que transforma a figura

1 Adaptado de Bastos, 2006.

nela mesma novamente. É importante frisar que nem toda isometria é uma simetria. Na figura 2 anterior, por exemplo, a transformação ocorrida no triângulo da direita em relação ao da esquerda é uma isometria e não uma simetria, pois este foi transladado e rotacionado a uma posição do plano distinta da original.

A transformação T pode ser uma reflexão, uma translação ou uma rotação para ser uma simetria. Caso T seja uma reflexão, a simetria é dita *simetria de reflexão*; caso T seja uma translação, a simetria é dita *simetria de translação* e caso T seja uma rotação, a simetria é dita *simetria de rotação*. Essas três simetrias serão expostas nos itens a seguir.

2 Simetrias de reflexão

2.1 Simetria de reflexão vertical

É a mais familiar do dia a dia. Também é chamada de simetria axial. A simetria exemplificada na introdução do presente texto, a da figura de uma borboleta (figura 1), simétrica em relação a um eixo que passa pelo meio do seu corpo, é uma simetria de reflexão. Uma figura possui este tipo de simetria se pode ser refletida em relação a um eixo vertical (dito eixo de simetria), de modo a ser possível fazer-se corresponder ponto a ponto com a imagem original.

Por exemplo, a letra "A" possui uma simetria de reflexão vertical (figura 3). Essa letra cobre exatamente o mesmo conjunto de pontos do plano se for refletida ao redor de um eixo vertical que passa pelo seu topo.

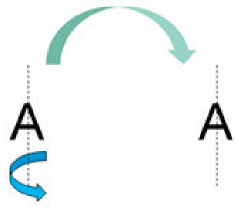

Figura 3 – Simetria de reflexão da letra A

As letras **M** e **V** também possuem esse tipo de simetria.

2.1.1 Simetria correlata na música

Figuras musicais como as dos exemplos a seguir possuem simetrias de reflexão **vertical** com respeito a um eixo vertical y que passa, respectivamente, pela nota Dó 4, na figura 4, e pela nota Mi*b* 3, na figura 5. Esse tipo de simetria é dita temporal, porque, na notação musical, o tempo é representado horizontalmente, do passado à esquerda para o futuro à direita. Esse tipo de simetria é facilmente visualizado na partitura, realizando-se temporalmente. As figuras 4 e 5, a seguir, retratam esse tipo de simetria.

Figura 4 – Reflexão temporal em uma figura musical
Fonte: http://solomonsmusic.net/diss2.htm

Figura 5 – Chopin – *Estudo opus 10 nº. 12 (Revolucionário)*
Simetria de Reflexão Temporal
Fonte: http://solomonsmusic.net/diss2.htm

A figura a seguir (figura 6) exibe um Minuetto, da Sonata número 4 para piano de Haydn, na qual o movimento todo pode ser tocado normalmente ou de trás para frente, pois soa a mesma coisa. Verifica-se que é possível perceber a simetria por meio de um eixo que passa pelo compasso 11.

Figura 6 – *Menuetto al rovescio*, da sonata no. 4 para piano de Haydn – Reflexão Temporal com o eixo de simetria no compasso 11
Fonte: http://solomonsmusic.net/diss2.htm

Simetrias de reflexão verticais também podem ser encontradas em outros parâmetros em música, como, por exemplo, dinâmica, textura, forma, tempo e outros.

a) Na dinâmica: p < f > p

b) Na mudança de andamentos: ***a tempo ---- accel.---- ritardando---- a tempo***

c) Nas formas: forma ternária ABA; na forma Rondó-Sonata ABACABA; na forma palíndroma ABCACBA,[2] dentre outras.

2.2 Simetria de reflexão horizontal

Uma figura possui esse tipo de simetria se pode ser refletida em relação a um eixo **horizontal**, de modo a ser possível fazer-se corresponder ponto a ponto com a imagem original. As letras **C**, **E** e **K** possuem esse tipo de simetria.

2.2.1 Simetria correlata na música

As figuras musicais podem ser simétricas em relação ao eixo das alturas, representado verticalmente na notação musical (figura 7 – notas de comprimento de onda mais curto, mais agudas, são escritas mais acima).

Figura 7 – Uma forma reflexiva visual sobre o eixo x

Fonte: http://solomonsmusic.net/diss2.htm

O exemplo da figura 7a é um acorde reflexivo com respeito ao eixo que passa pela nota Lá 3. Todas as notas abaixo do Lá possuem

2 Como, por exemplo, no primeiro movimento da Sonata para Trompete e Piano de Hindemith.

notas correspondentes às que estão acima e à mesma distância deste (distância = intervalo, neste caso). O exemplo da figura 6b traz uma figura melódica e sua inversão simultânea em relação ao eixo Lá 3. Se um motivo musical tem esse tipo de simetria, as vozes superiores refletem os movimentos das inferiores, movendo-se em direções opostas, o que é conhecido como movimento contrário.

Um exemplo advindo da literatura musical é encontrado no compasso 16 da peça Hyperprism, de Varèse, conforme observado por Lima (2007) e demonstrado na figura 8.

Figura 8 - Acorde espelhado em Hyperprism

A maioria dos compositores tem pouco interesse em fazer composições com vozes superiores sendo espelhos das inferiores com exatidão matemática, ou seja, com precisão intervalar ou em fazer o movimento contrário durante muitos compassos. Bartók, entretanto, fez isso propositalmente em uma de suas peças do Mikrokosmos, a de número 141, conforme pode-se constatar pela figura a seguir.

Figura 9 – Tema e reflexão na peça Mikrokosmos – 141 - Bartók

2.3 Exemplos de simetrias de reflexão com outros eixos

Algumas escalas musicais podem ser vistas como simétricas em relação a um eixo, como as escalas diatônica e pentatônica representadas nas figuras 10 e 11.

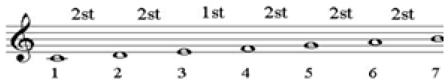

Figura 10 – Escala diatônica

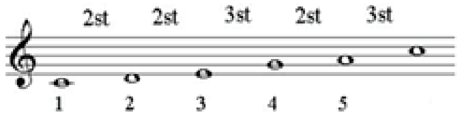

Figura 11 – Escala pentatônica

Entende-se, nessa representação, a distância entre duas notas como sendo o número de semitons entre elas. Sob a perspectiva dessa relação, observa-se que as escalas diatônica e pentatônica são simétricas em relação ao eixo que passa pelas notas Ré e Sol#, como pode ser visualizado nas figuras 12 e 13, a seguir. Para visualizar a simetria das escalas, adotaremos o modelo de um "relógio" para representar as doze notas musicais.

Luciana Gastaldi e Tadeu Taffarello.
Simetria e Música. *Música em Contexto,* Brasília, Nº. 1 (2013): 51-74

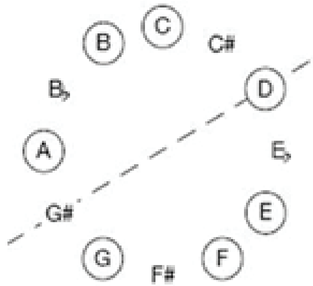

Figura 12 – Simetria de reflexão na escala diatônica

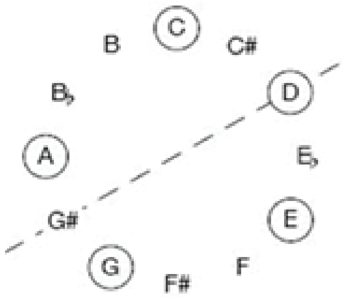

Figura 13 – Simetria de reflexão na escala pentatônica

O próprio teclado nos convida a visualizar essa simetria. Pode-se observar, na figura 14 a seguir, que a distância entre Ré e Mi é a mesma que entre Ré e Dó. Da mesma forma, a distância entre Ré e Fá é a mesma que entre Ré e Si, e assim por diante, caracterizando a simetria.

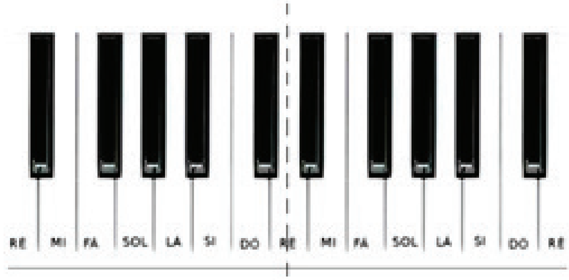

Figura 14 – Simetria da escala diatônica em relação ao eixo que passa pela nota ré

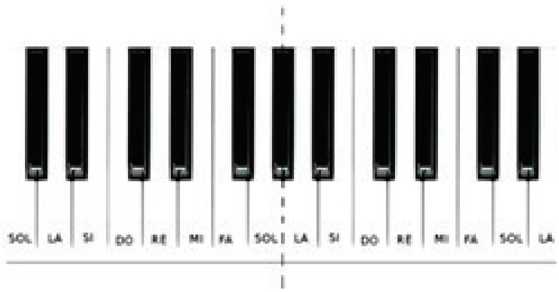

Figura 15 – Simetria da escala diatônica em relação ao eixo que passa pela nota sol#

A escala hexatônica, ou de tons inteiros (formada apenas por tons), possui 6 eixos de simetria. Cada nota da escala, junto com o seu trítono, forma um eixo de simetria (figura 17).

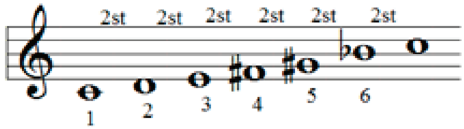

Figura 16 – Escala hexatônica

Luciana Gastaldi e Tadeu Taffarello.
Simetria e Música. *Música em Contexto,* Brasília, Nº. 1 (2013): 51-74

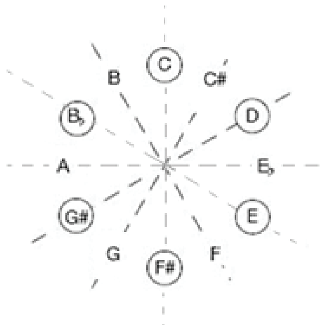

Figura 17 – Simetria de reflexão na escala hexatônica

3 Simetria de translação

Uma figura possui esse tipo de simetria se existir uma translação que a preserve, ou seja, se pudermos movimentar a figura segundo uma dada distância e uma dada direção, de tal modo que a figura transformada coincida com a original. Em caso afirmativo, a figura deve ser ilimitada. Supondo a figura 18, a seguir, infinita na direção do eixo x, percebe-se que ela possui uma simetria de translação, de comprimento $\overline{OA}$ para a direita, e uma simetria de translação, de comprimento $\overline{OA}$ para a esquerda. Além dessa, possui uma simetria de reflexão em torno do eixo Ox e também uma simetria de reflexão em torno do eixo Oy.

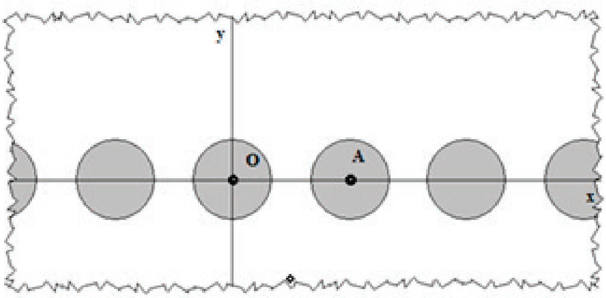

Figura 18 – Simetria de translação

3.1 Padrões correlatos na música

Como uma peça musical dura um número finito de compassos, ou seja, tem um começo à esquerda e um fim à direita, e é também limitada no sentido vertical, tem notas mais agudas e notas mais graves acima e abaixo, torna-se inviável uma aplicação em música da simetria de translação, uma vez que a figura que possui tal simetria deve ser infinita e um motivo musical é sempre finito. O que são encontrados em várias composições são padrões que se repetem.

Os exemplos a seguir (figuras 19 e 20) ilustram casos de padrões de motivos musicais horizontais (que se repetem em relação ao tempo) e verticais (que se repetem em relação ao eixo das alturas).

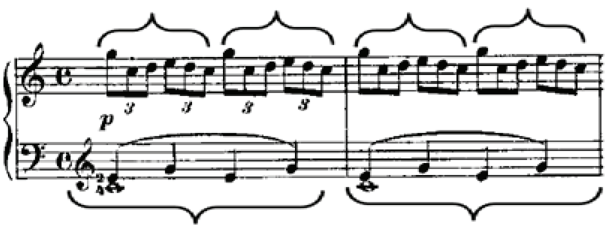

Figura 19 – Czerny, opus 849 – *Estudo nº 1*
Padrão Horizontal (temporal)

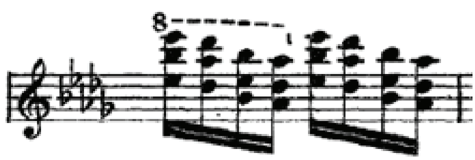

Figura 20 – Debussy – *Reflets dans l'eau*
Padrão Horizontal (temporal) e Vertical

Como pode-se perceber, o padrão vertical em melodias gera movimentos paralelos. A figura 20 mostra acordes de quinta e quarta

Luciana Gastaldi e Tadeu Taffarello.
Simetria e Música. *Música em Contexto,* Brasília, Nº. 1 (2013): 51-74

que se movem paralelamente. Os cânones, gerados por uma imitação melódica, são resultado de um padrão temporal. Um exemplo é apresentado na figura 21, a seguir. Trata-se do trecho inicial de um cânone de Johann Pachelbel (1653-1706) para 3 violinos. Cada violino repete a mesma melodia, defasado dois compassos da entrada do violino anterior. É um padrão que se repete deslocado temporalmente.

Figura 21 – Palchelbel – *Cânone para 3 violinos*

4 Simetria de rotação

Outra simetria possível é a rotação ao redor de um ponto. Uma figura possui esse tipo de simetria se existir uma rotação diferente da identidade que preserve a figura. A figura 22, a seguir, é um exemplo desse tipo de simetria.

Figura 22 – Simetria de rotação

Ao rodarmos essa figura de 72º (ou 144º, ou 216º, ou 288º) em torno do seu ponto central, a figura resultante é a mesma que a original.

A letra Z é um outro exemplo (figura 23). Ao rodar-se esta letra de 180 graus ao redor do seu ponto central, obtém-se novamente a mesma letra. Ao completar uma volta, ela volta a ser ela mesma duas vezes. Por isso, ela é considerada uma figura com rotação composta.

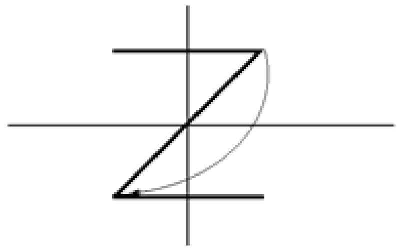

Figura 23 – Simetria de rotação

As letras **N** e **S** também possuem esse tipo de simetria.

Um exemplo do uso dessa rotação composta pode ser observada na obra de Paul Hindemith (1895 – 1963) *Ludus Tonalis*. Hindemith era extremamente musical, compunha com notável facilidade e foi um compositor importante da primeira parte do século XX. Também era um exímio executante e regente. *Ludus Tonalis* faz parte de um grande e didático ciclo de fugas e de interlúdios para piano publicados em 1943. O Poslúdio pode ser obtido do Prelúdio por meio de uma rotação de 180º. Se o executante virar a partitura do Prelúdio de cabeça para baixo, ele terá a partitura do Poslúdio. Portanto, a reunião do Prelúdio com o Poslúdio possui a rotação de 180º como simetria. A figura 24, a seguir, mostra um trecho dessas peças.

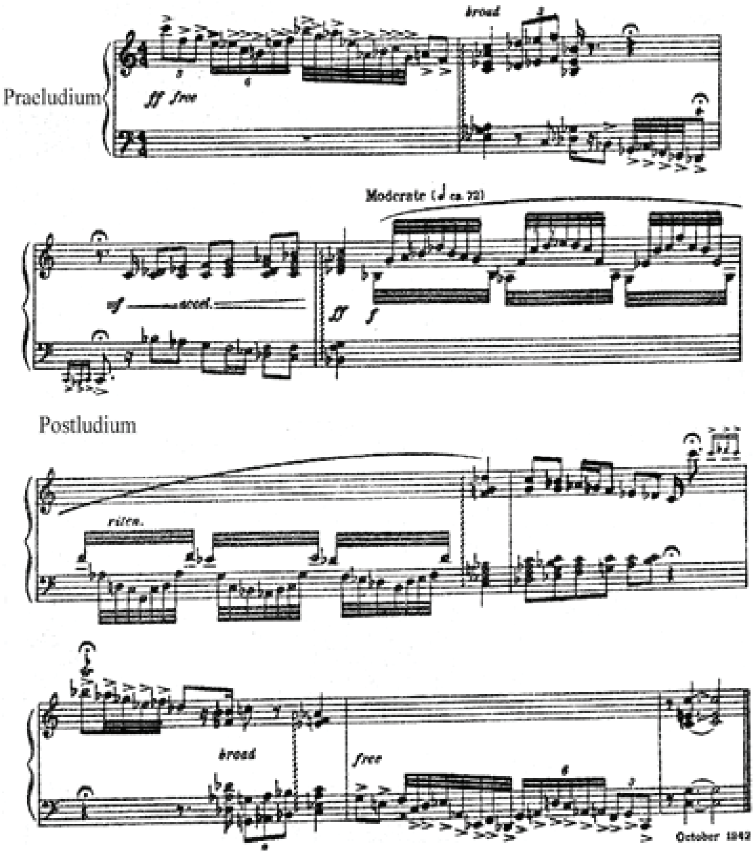

Figura 24 – Trecho inicial do Prelúdio e final do Poslúdio de *Ludus Tonalis* de Hindemith

Um exemplo muito raro, no qual pode-se observar todos os tipos de simetria citados anteriormente, é encontrado em um exercício elementar para piano de Georg Kurtág. É o que ilustra a figura 25, a seguir.

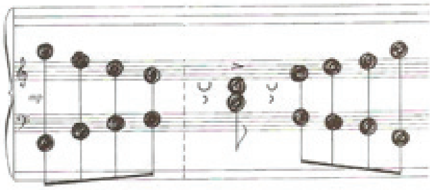

Figura 25 – Georg Kurtág – *Jogos para piano* – 1. Hommage à Eötvös Péter

Os círculos negros da figura anterior indicam que o teclado deve ser tocado com as palmas das mãos, em *clusters*. Esse motivo musical possui simetria horizontal de reflexão, simetria vertical de reflexão e simetria rotacional.

5 Um exemplo na obra de Bartók

Béla Bartók (1881-1945) foi uma figura importante do início do século XX. Pesquisou a música popular húngara e fez as primeiras coleções de música folclórica da Europa Oriental. Trabalhou com escalas distintas das comumente utilizadas e lutava por criar uma música diferente da usual, menos previsível e mais ligada às raízes étnicas. As simetrias colaboraram para isso. Bartók as utilizou em suas composições, como, por exemplo, a célula “Z” Bartokiana, que nasceu da escala octatônica formada por 8 notas na qual semitons e tons alternam-se (figura 26).

Figura 26 – Escala octatônica 1-2 (começando por st)

Luciana Gastaldi e Tadeu Taffarello.
Simetria e Música. *Música em Contexto,* Brasília, Nº. 1 (2013): 51-74

Essa escala possui quatro eixos de simetria, conforme mostra a figura a seguir (figura 27).

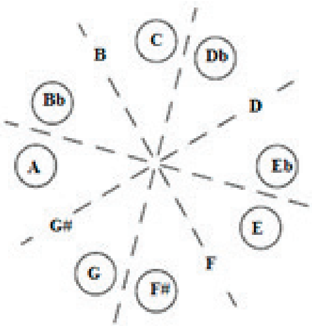

Figura 27 – Eixos de simetria da escala octatônica 1-2

Existe outra forma dessa escala, mostrada na figura 28, a seguir, a qual, ao invés de começar com um semitom, começa com um tom.

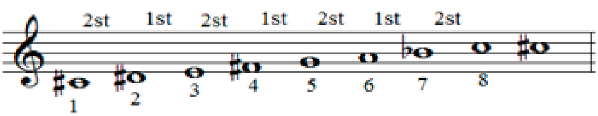

Figura 28 – Escala octatônica 2-1 (começando por tom)

Uma característica interessante dessa escala é que uma forma se converte na outra após uma reflexão segundo o eixo da nota inicial. Veja, por exemplo, essa conversão tomando a escala da figura 29.

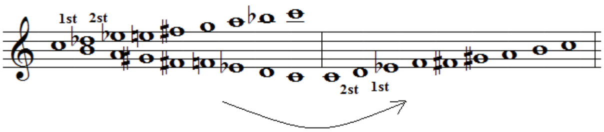

Figura 29 – Reflexão da escala octatônica 1-2 sobre o eixo de dó
e sua escrita na forma ascendente

Bartók tomou dois tetracordes dessa escala para compor a célula Z. Começando a escala octatônica 1-2 com a nota Sol# (figura 30) e tomando dois tetracordes alternados, teremos:

Figura 30 – Escala octatônica começando da nota Sol#,
enfatizando dois tetracordes

Figura 31 – Células "Z"

Luciana Gastaldi e Tadeu Taffarello.
Simetria e Música. *Música em Contexto,* Brasília, Nº. 1 (2013): 51-74

Percebe-se que nessa célula (figura 31) há dois eixos de simetria. A figura 32, a seguir, mostra, por exemplo, os eixos de simetria da primeira célula Z.

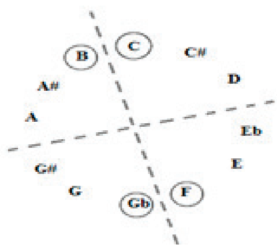

Figura 32 – Segunda célula Z: dois eixos de simetria

Além disso, se escrevermos a primeira no sentido ascendente, perceberemos que a segunda é uma transposição desta, de 3 semitons (figura 33). É o que mostra a figura a seguir.

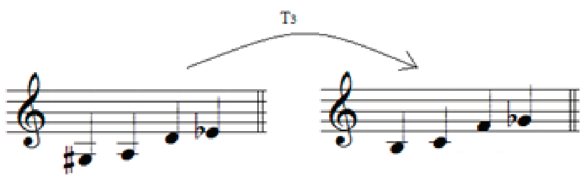

Figura 33 – Células Z: a segunda é uma transposição de 3 semitons da primeira

A sua peça para piano, *Da Ilha de Bali (Mikrokosmos* vol IV – figura 36), foi composta com estas células (figura 34).

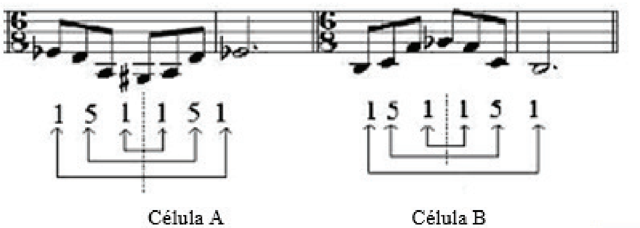

Figura 34 - Figura musical, cujo eixo de simetria, no primeiro caso, está na nota sol# e, no segundo caso, na nota solb

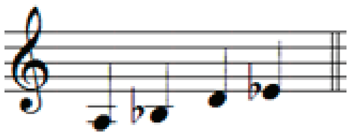

Figura 35 – Célula C

A figura 36, a seguir, mostra a partitura dessa peça, com as indicações das células utilizadas. Percebe-se a inclusão de uma nova célula contrastante (a qual foi denominada de célula C e é mostrada na figura 35) nos compassos de 24 a 30.

Luciana Gastaldi e Tadeu Taffarello.
Simetria e Música. *Música em Contexto,* Brasília, Nº. 1 (2013): 51-74

Figura 36 – Análise de Da Ilha de Bali, de Bartók

Considerações finais

Este artigo procurou estabelecer uma ligação entre diversos tipos de simetria e a música. A simetria é um tipo de ferramenta matemática que pode ser utilizada para compreender algumas estruturas subjacentes às composições. Dessa maneira, foi possível demonstrar as simetrias de reflexão horizontal e vertical, e a de rotação, pontuando-as com as suas correlações na música. Percebeu-se, também, que a simetria pode auxiliar na análise musical por meio da abertura de novas ferramentas composicionais. Um exemplo demonstrado foi a análise da peça de Bela Bartók *Da Ilha de Bali*, parte integrante do quarto volume do Mikrokosmos. Nessa análise, percebeu-se que a simetria ocorre em relação à formação intervalar interna da célula Z.

Uma abertura para futuros aprofundamentos que o artigo propõe é que, além das simetrias, outras componentes matemáticas são passíveis de serem investigadas em composições musicais, como a presença da Razão Áurea, a autossimilaridade, fatores decorrentes da Teoria de Conjuntos de Allen Forte, a permutação simétrica de Messiaen, dentre outras. Sugere-se que a investigação da presença de componentes matemáticas em composições musicais seja um elemento adicional a ser analisado, pois ela pode ajudar tanto a explicar o projeto composicional quanto a elaborar novas composições.

Luciana Gastaldi e Tadeu Taffarello.
Simetria e Música. *Música em Contexto,* Brasília, Nº. 1 (2013): 51-74

Referências bibliográficas

Bastos, Rita. "Simetria. Notas sobre o ensino da geometria (GTG)." *Educação e Matemática*, n.º 88, (Maio/Junho 2006). Lisboa: APM.

Fauvel, John, Raymond Flood, e Robin Wilson. *Music and Mathematics. From Pythagoras to Fractals*. New York: Oxford University Press, 2003.

Gouveia, Horácio de Oliveira Caldas. *Os jogos (Játékok) de György Kurtág para piano: corpo e gesto numa perspectiva lúdica*, Tese de Doutorado, ECA-USP, 2010.

Lima, Rodrigo. "Edgard Varèse & Pierre Schaeffer: por uma emancipação do Som." In: *Anais do XVII Congresso da ANPPOM*. Universidade Estadual de São Paulo (UNESP) (2007).

Solomon, Larry J. *Symmetry as a compositional determinant*, 1973, revisado em 2002. In http://solomonsmusic.net/diss.htm

Shaffer, K. *A transformation approach to collection and mode in the music of Béla Bartók*. Yale University. Music 980a. Prof. David Clampitt (2005).

Souza, Luciana Gastaldi Sardinha. *Uma abordagem didático-pedagógica da racionalidade matemática na criação musical*. Tese de Doutorado (FEUSP, 2012).

Weyl, Hermann. *Symmetry*. New Jersey: Princeton University Press, 1952.